Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că suma pătratelor elementelor mulțimii $M=\{n\in\mathbb{N} \mid n-1<2\}$ este egală cu 5.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+5$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că vârfului parabolei asociate funcției f are abscisa egală cu 3.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=\sqrt{8-x}$.
5p	**4.** Determinați numărul submulțimilor cu 10 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinați ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin mijlocul segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.
5p	**6.** Calculați $S=\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2020\pi$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1&-x\\1&0&1\\-x&1&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(y)-A(2xy))=0$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=nI_3$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}\right)^5$.
5p	**a)** Arătați că $2^5*3^5=5^5$.
5p	**b)** Determinați numărul real x, știind că $2^5*x^5*\left(243x^5\right)=100000$.
5p	**c)** Se consideră numerele $M=1^5*2^5*\ldots*10^5$ și $N=5^5\cdot 11^5$. Demonstrați că $M-N=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că graficul funcției f **nu** intersectează axa Ox.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^{1} \left| x f(x) \right| dx$.

5p **c)** Calculați $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n<3 \Rightarrow M=\{0,1,2\}$	**3p**
	Suma pătratelor elementelor mulțimii M este $0^2+1^2+2^2=5$	**2p**
2.	Abscisa vârfului parabolei asociate funcției f este $-\frac{b}{2a}=\frac{m}{2}$	**2p**
	$\frac{m}{2}=3$, deci $m=6$	**3p**
3.	$x+2=8-x \Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 12 elemente are C_{12}^{10} submulțimi cu 10 elemente	**3p**
	$C_{12}^{10}=\frac{12\cdot 11}{2}=66$	**2p**
5.	$D(2,2)$, deci $M(5,6)$, unde M este mijlocul segmentului CD	**2p**
	$m_{AC}=3$, deci ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin punctul M este $y-6=3(x-5)$, deci $y=3x-9$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi=1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$S=(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-1)+(-1)-0-1-1=-4$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+2xy&0&1-2xy\\0&2&0\\1-2xy&0&1+2xy\end{pmatrix}$, $A(2xy)=\begin{pmatrix}2xy&1&-2xy\\1&0&1\\-2xy&1&2xy\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\det(A(x)A(y)-A(2xy))=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(x)A\left(\frac{1}{2x}\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I_3$, pentru orice număr real nenul x	**2p**
	$A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=1010\cdot 2I_3$, deci $n=2020$	**3p**

2.a)	$2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{2^5}+\sqrt[5]{3^5}\right)^5 =$ $=(2+3)^5 = 5^5$	**3p** **2p**
b)	$2^5 * x^5 * \left(243x^5\right) = \left(\sqrt[5]{2^5}+\sqrt[5]{x^5}+\sqrt[5]{243x^5}\right)^5 = (2+x+3x)^5 = (2+4x)^5$, unde x este număr real $(2+4x)^5 = 10^5$, deci $x=2$	**3p** **2p**
c)	$1^5 * 2^5 = \left(\sqrt[5]{1^5}+\sqrt[5]{2^5}\right)^5 = (1+2)^5$, $1^5 * 2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{1^5}+\sqrt[5]{2^5}+\sqrt[5]{3^5}\right)^5 = (1+2+3)^5$ $M = 1^5 * 2^5 * 3^5 * \ldots * 10^5 = \left(\sqrt[5]{1^5}+\sqrt[5]{2^5}+\sqrt[5]{3^5}+\ldots+\sqrt[5]{10^5}\right)^5 = (1+2+3+\ldots+10)^5 = 5^5 \cdot 11^5 = N$, de unde obținem $M-N=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} =$ $= \dfrac{2x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x \in (0,+\infty)$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1} + \ln\dfrac{x+1}{x}\right) = 1 + \ln 1 = 1$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty) \Rightarrow f(x) \ge f(1)$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$ $f(1) = \ln 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, de unde obținem că graficul funcției f **nu** intersectează axa Ox	**3p** **2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f^2(x)dx = \int\limits_0^1 \left(x^2+1\right)dx = \left.\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^1 =$ $= \dfrac{1}{3} + 1 - 0 = \dfrac{4}{3}$	**3p** **2p**
b)	$\int\limits_{-1}^1 \left\|xf(x)\right\| dx = -\int\limits_{-1}^0 x\sqrt{x^2+1}\,dx + \int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx =$ $= -\dfrac{1}{3}\left.\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_{-1}^0 + \dfrac{1}{3}\left.\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_0^1 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$	**2p** **3p**
c)	Din regula lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\int\limits_0^x t\cdot f(t)dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x f(x)}{2x} =$ $= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$	**3p** **2p**