Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-2x$. Arătați că $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=2$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}$. Știind că O este un punct oarecare din plan, arătați că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Știind că $x\in(\pi,2\pi)$ și $\cos 2x=\frac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-3$.

5p **b)** Pentru $a=-1$ și $b=-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in G$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:M\to G$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}$.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-x\right)dx=2\ln 2$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e \left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\dfrac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=1+2i\sqrt{3}+3i^2-\left(1-2i\sqrt{3}+3i^2\right)=4i\sqrt{3}$	**3p**
	Partea reală a lui z este 0	**2p**
2.	$f(3)<0$, $f(4)<0$, $f(5)<0$	**2p**
	$f(0)>0$, $f(1)>0$ și $f(2)>0$, deci $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$	**3p**
3.	$(\log_2 x-1)^2=0\Rightarrow \log_2 x=1$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare este egal cu $C_5^2\cdot C_5^1=$	**3p**
	$=\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 5=50$	**2p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CA}=$	**3p**
	$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	**2p**
6.	$1-2\sin^2 x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{3}$	**3p**
	Cum $x\in(\pi,2\pi)$, obținem $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=10+6+4-4-4-15=-3$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații devine $\begin{cases}2x-y+2z=4\\3x-y+2z=1\\2x-y+5z=-2\end{cases}$ și, cum $\det\left(A(-1)\right)=3\neq 0$, sistemul de ecuații este compatibil determinat	**2p**
	$x=-3$, $y=-14$, $z=-2$	**3p**
c)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}2&a&2\\3&a&2\\2&a&5\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=-3a$, pentru orice număr real a și, cum $\det\left(A(a)\right)=0$, obținem $a=0$	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&2\\3&2\end{vmatrix}=-2\neq 0$ și $\begin{vmatrix}2&2&4\\3&2&1\\2&5&b\end{vmatrix}=0$, deci $38-2b=0$, de unde obținem $b=19$	**3p**

2.a)	$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+1+1}=$	**3p**
	$=\sqrt{x^2\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)+1}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x,\ y\in G$	**2p**
b)	$x*e=x\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1}=x\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)=x^2-1$, pentru orice $x\in G$, deci $e^2-1=1$ și, cum $e\in G$, obținem $e=\sqrt{2}$	**3p**
	Cum $\sqrt{2}*x=\sqrt{(2-1)\left(x^2-1\right)+1}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$, obținem că $e=\sqrt{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$f(x)*f(y)=\sqrt{\left(f^2(x)-1\right)\left(f^2(y)-1\right)+1}=\sqrt{(x+1-1)(y+1-1)+1}=\sqrt{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in M$, deci f este un morfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**3p**
	f este continuă, f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x+1)e^{-x}\cdot(-1)=$	**3p**
	$=\left(1-(x+1)\right)e^{-x}=-xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}=\left(\dfrac{(n+1)e^{-n}}{e(n+2)e^{-(n+1)}}\right)^n=\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{-n}{n+2}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x+1)e^{-x}\right)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^x}=0$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=1$ și f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte $\Leftrightarrow m\in(0,1)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-x\right)dx=\int\limits_0^1\dfrac{2}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2\ln 2-2\ln 1=2\ln 2$	**2p**
b)	$\int\limits_1^e\left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx=\int\limits_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int\limits_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	F este primitivă a lui f și $F(0)=0$, deci $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2\ln(x+1)$	**1p**
	$\int\limits_0^1 2f(x)F(x)dx=\int\limits_0^1 2F(x)F'(x)dx=F^2(x)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{4}+2\ln 2+4\ln^2 2$	**2p**
	$\dfrac{1}{4}+2\ln 2+4\ln^2 2=\dfrac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a\Leftrightarrow 4\ln^2 2=\ln^2 a$, deci $\ln a=-2\ln 2$ sau $\ln a=2\ln 2$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{4}$ sau $a=4$, care convin	**2p**