Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului real $x=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta de ecuație $y=2x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{7-2x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=2$, $AC=3$ și $m(\sphericalangle BAC)=60°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ și $\left(A(a)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\3&a&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional q, matricea $A(q)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-\left(A(a)\right)^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p)+5B(p)=O_3$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

5p **b)** Verificați dacă $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:G\to M$, $f(x)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați $m\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M\left(m,f(m)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x$.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că șirul $\left(I_n\right)_{n\geq1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0<\sqrt{2}-1<1 \Rightarrow 0<\left(\sqrt{2}-1\right)^2<1$	**3p**
	Partea întreagă a numărului real x este 0	**2p**
2.	$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-2x=2x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=3$	**2p**
3.	$4^{x-2}=4^{2x-7} \Leftrightarrow x-2=2x-7$	**3p**
	$x=5$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A este egal cu $C_{10}^3=$	**3p**
	$=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow B$ este mijlocul segmentului AC, deci $2=\dfrac{1+x_C}{2}$ și $5=\dfrac{3+y_C}{2}$	**3p**
	$x_C=3$ și $y_C=7$	**2p**
6.	$\cos(\sphericalangle BAC)=\dfrac{1}{2}$ și $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos(\sphericalangle BAC)$, deci $BC=\sqrt{7}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=5+\sqrt{7}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&-2&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&-2&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-3-(-4)-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^2-3$, pentru orice număr real a	**2p**
	Pentru orice număr rațional q, $\det(A(q))\neq 0$, deci matricea $A(q)$ este inversabilă	**3p**
c)	Pentru orice număr rațional p, $B(p)=2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&p\\-1&-p&0\end{pmatrix}$, $B(p)B(p)=-4\begin{pmatrix}1&p&0\\p&p^2&0\\0&0&1+p^2\end{pmatrix}$ și $B(p)B(p)B(p)=-4\left(p^2+1\right)B(p)$	**3p**
	$\left(1-4p^2\right)B(p)=O_3 \Leftrightarrow p=-\dfrac{1}{2}$ sau $p=\dfrac{1}{2}$, care convin	**2p**
2.a)	$\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{3}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{1}{5}$	**2p**

b)	$x*\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$\frac{1}{2}*x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x=x*\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in G$ și, cum $\frac{1}{2}\in G$, obținem că $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$f(x*y)=\frac{2xy-x-y+1}{xy}-1=\frac{xy-x-y+1}{xy}=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{y-1}{y}=f(x)f(y)$, pentru orice $x,y\in G$, deci f este un morfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$	**3p**
	f este continuă, f este strict descrescătoare pe $(0,1)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $M(m,f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x\Leftrightarrow f'(m)=2$	**2p**
	$1+\ln m=2\Rightarrow m=e$, care convine	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, deci $f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x\ln x\ge-\frac{1}{e}$, deci $x\ln x+\frac{1}{e}\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\cos t\,dt=\sin t\Big\|_0^x=\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$	**3p**
c)	$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0\le\cos x\le 1\Rightarrow 0\le\cos^n x\le 1\Rightarrow I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x(\cos x-1)dx\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\ge1}$ e descrescător	**2p**
	$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos^n x\ge 0\Rightarrow I_n\ge 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este mărginit inferior, de unde obținem că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent	**3p**