Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,x\le\sqrt{5}\right\}$.

5p **2.** Determinați numerele reale m și n, știind că $f(1)=2$ și $f(2)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+n$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x+2\cdot 4^x-8=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor un număr prim.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul O, intersecția diagonalelor acestuia. Arătați că $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați $\sin x$, știind că $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ a-3 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=5$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluție unică $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=x+y-\frac{xy}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=\frac{26}{9}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „$*$” sunt numere naturale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n, $n\ge 2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=4$.

5p	**b)** Calculați $\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx = 2(e-3)^2$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$A=\{0,1,2\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este egală cu $0+1+2=3$	**2p**
2.	$f(1)=m+n$ și $f(2)=2m+n$, deci $m+n=2$ și $2m+n=1$	**2p**
	$m=-1,\ n=3$	**3p**
3.	$(4^x+4)(4^x-2)=0$	**2p**
	$2^{2x}=2$, deci $x=\dfrac{1}{2}$	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au cifra sutelor un număr prim are $4\cdot 10\cdot 10=400$ de elemente, deci sunt 400 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{400}{900}=\dfrac{4}{9}$	**1p**
5.	O este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD\Rightarrow \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$	**3p**
	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$, obținem $\sin x=-\dfrac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&1\\-3&0&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0+3+0-0-(-2)+0=5$	**2p**
b)	$\det(A(a))=a^2-6a+5$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$ și soluția sistemului este $\left(\dfrac{2(a-1)}{a-5},-\dfrac{2}{a-5},-\dfrac{a+1}{a-5}\right)$	**3p**
	$2\cdot\left(-\dfrac{2}{a-5}\right)=\dfrac{2(a-1)}{a-5}+\left(-\dfrac{a+1}{a-5}\right)$, deci $a=-1$, care convine	**2p**

2.a)	$1*3=1+3-\frac{1\cdot 3}{3}=$	**3p**
	$=1+3-1=3$	**2p**
b)	$x*x=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3$, $x*x*x=\frac{1}{3^2}(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{9}(x-3)^3+3=\frac{26}{9}\Leftrightarrow(x-3)^3=-1\Leftrightarrow x-3=-1$, de unde obținem $x=2$	**3p**
c)	$x*0=0*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$n*n'=0\Leftrightarrow n'(n-3)=3n$, deci $n'=\frac{3n}{n-3}$, pentru orice număr natural n, $n\neq 3$	**2p**
	Cum n și n' sunt numere naturale, obținem $n=0$, $n=4$, $n=6$ sau $n=12$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}=$	**3p**
	$=\frac{4(x^4-1)}{x}=\frac{4(x^2-1)(x^2+1)}{x}=\frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4-4\ln x\right)=+\infty$	**3p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,1)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $(0,+\infty)$, deci pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte, $x_1\in(0,1)$ și $x_2\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int\limits_0^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$\int\limits_1^e \frac{1}{x^2}f(\ln x)dx=\int\limits_1^e\frac{1}{x}\ln^3 x dx=\frac{\ln^4 x}{4}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{\ln^4 e}{4}-\frac{\ln^4 1}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$F(x)=\left(x^3-3x^2+6x-6\right)e^x+c$, $c\in\mathbb{R}$ și, cum $F(0)=0\Rightarrow F(x)=\left(x^3-3x^2+6x-6\right)e^x+6$	**2p**
	$\int\limits_0^1 f(x)F(x)dx=\int\limits_0^1 F'(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}\left(F^2(1)-F^2(0)\right)=2(e-3)^2$	**3p**