Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}<2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2-4x+5$. Determinați produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x-2}+3^{x+2}=91$.

5p **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^9$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(3,2)$. Determinaţi ecuația dreptei OG, știind că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=2$ și $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=7$.

5p **b)** Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{xy}{x+y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y\circ z=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{10}=\frac{1}{54}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{6}$.

5p	**b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x} \ln x \, dx = \frac{e^2-7}{4}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, $a>1$ pentru care $\int_1^a f(x) e^x dx = e^a - 3e$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)<2$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$	**2p**
	Cum $\Delta>0$, produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egal cu -5	**3p**
3.	$3^{x-2}\left(3^2+1+3^4\right)=91\Leftrightarrow 3^{x-2}=1$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_9^k x^{\frac{9-k}{2}+(-k)}=C_9^k x^{\frac{9-3k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,9\}$	**3p**
	$\frac{9-3k}{2}=0\Leftrightarrow k=3$, deci $T_4=C_9^3=84$ nu îl conține pe x	**2p**
5.	$G\left(\frac{-1+1+3}{3},\frac{1+3+2}{3}\right)$, deci $G(1,2)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC	**3p**
	Ecuația dreptei OG este $y-0=\frac{2-0}{1-0}(x-0)$, deci $y=2x$	**2p**
6.	$\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$2R=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow 2R=\frac{4}{\sqrt{2}}$, deci raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R=\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\3&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+6-(-3)-4-0=7$	**3p**
b)	$\det(A(a))=11-4a$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	Cum $\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=\frac{11}{4}\notin\mathbb{Z}$, obținem $\det(A(a))\neq 0$, pentru orice număr întreg a, deci rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a	**3p**
c)	Pentru orice număr întreg m, $A(m)$ este inversabilă și $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi $\Leftrightarrow\det(A(m))=-1$ sau $\det(A(m))=1$	**3p**
	Cum m este număr întreg, obținem $m=3$	**2p**

2.a)	$2\circ 2=\frac{2\cdot 2}{2+2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{4}=1$	**2p**
b)	$x\circ y\circ z=\left(\frac{xy}{x+y}\right)\circ z=\frac{\frac{xy}{x+y}\cdot z}{\frac{xy}{x+y}+z}=\frac{xyz}{xy+xz+yz}=$	**3p**
	$=\frac{1}{\frac{xy}{xyz}+\frac{xz}{xyz}+\frac{yz}{xyz}}=\frac{1}{z^{-1}+y^{-1}+x^{-1}}=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$	**2p**
c)	$\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{10}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+\ldots+\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(2+3+4+\ldots+10\right)^{-1}=$	**3p**
	$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}-1\right)^{-1}=54^{-1}=\frac{1}{54}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	f este continuă pe $(1,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\ln e^2=2$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{5}{6}$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f(x)}{x}\ln x\,dx=\int_1^e(x-3)\ln x\,dx+\int_1^e\frac{2}{x}\ln x\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-3\right)dx+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln^2 x\Big\|_1^e=$	**2p**
	$=\frac{e^2}{2}-3e-\left(\frac{x^2}{4}-3x\right)\Big\|_1^e+\ln^2 e-\ln^2 1=\frac{e^2}{2}-3e-\left(\frac{e^2}{4}-3e-\frac{1}{4}+3\right)+1=\frac{e^2-7}{4}$	**3p**
c)	$\int_1^a f(x)e^x dx=\left(x^2-3x+2\right)e^x\Big\|_1^a-\int_1^a(2x-3)e^x dx=\left(x^2-5x+7\right)e^x\Big\|_1^a=\left(a^2-5a+7\right)e^a-3e$	**3p**
	$\left(a^2-5a+7\right)e^a-3e=e^a-3e\Leftrightarrow a^2-5a+6=0$, deci $a=2$ sau $a=3$, care convin	**2p**