Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\log_2 7+\log_2 6-\log_2 21=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$. Demonstrați că $f(x)\geq g(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+12}=2x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-3x+2=0$.

5p **5.** Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $\vec{u}=3\vec{v}$, unde $\vec{u}=a\vec{i}+6\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$.

5p **6**. Se consideră expresia $E(x)=\sin^2 x-\cos^2 x+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(x))=5$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi numărul natural n astfel încât $A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $0*1=1$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că $x*(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x+x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-xe^x\right)dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\frac{e^4-e+3}{2}$.

5p **c)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1)=0$. Arătaţi că $\int_0^1 F(x)dx=\frac{5-3e}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 7+\log_2 6-\log_2 21=\log_2\frac{7\cdot 6}{21}=$	**3p**
	$=\log_2 2=1$	**2p**
2.	$f(x)-g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x-1)^2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci $f(x)\geq g(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$x^2+12=4x^2\Rightarrow 3x^2=12\Leftrightarrow x^2=4$	**3p**
	$x=-2$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=2$, care sunt elemente ale mulțimii A, deci avem 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u}=3\vec{v}\Leftrightarrow a\vec{i}+6\vec{j}=6\vec{i}+3b\vec{j}$	**3p**
	$a=6$, $b=2$	**2p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2}-2=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{vmatrix}=x^2-4-\left(x^2-9\right)=$	**3p**
	$=x^2-4-x^2+9=5$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(-3)+A(3)=A(-2)+A(2)=A(-1)+A(1)=2A(0)$	**3p**
	$2A(0)+2A(0)+2A(0)=nA(0)$, de unde obținem $n=6$	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} x & 3x+5 \\ x-5 & 3x-10 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix} x & 3x+5 \\ x-5 & 3x-10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$	**2p**
2.a)	$0*1=\frac{0+1+1}{0^2+1^2+1}=$	**3p**
	$=\frac{2}{2}=1$	**2p**

b)	$x*x=\dfrac{2x+1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\dfrac{2x+1}{2x^2+1}=1\Leftrightarrow 2x(x-1)=0\Rightarrow x=0$ sau $x=1$	**3p**
c)	$x*(-x)=\dfrac{x+(-x)+1}{x^2+(-x)^2+1}=\dfrac{1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x*(-x)\le 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{2x^2+1}\le 1\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2}{2x^2+1}\le 0$ inegalitate adevărată pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+x\cdot\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+2x+2+x^2+x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\dfrac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x+2}{x^3+2x^2+2x}=$	**3p**
	$=0$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{x^2+2x+2}=-\infty$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x^2+2x+2}=+\infty$ și, cum f este funcție continuă, obținem că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-xe^x\right)dx=\int_0^1\left(xe^x+x-xe^x\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\|_0^1=\dfrac{1}{2}$	**3p**
b)	$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_1^2\frac{x^2e^{x^2}+x^2}{x}dx=\int_1^2 xe^{x^2}dx+\int_1^2 xdx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\|_1^2+\frac{x^2}{2}\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}e^4-\dfrac{1}{2}e+\dfrac{4}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^4-e+3}{2}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'F(x)dx=xF(x)\Big\|_0^1-\int_0^1 x\,f(x)dx=F(1)-\int_0^1\left(x^2e^x+x^2\right)dx=$	**3p**
	$=-\left(\left(x^2-2x+2\right)e^x+\dfrac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^1=-\left(e+\dfrac{1}{3}-2\right)=\dfrac{5-3e}{3}$	**2p**