

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că primul termen este $b_1 = 2$ și rația este $q = 3$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$. Calculați suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x} = 3 - x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{50}\}$, acesta să nu fie număr natural.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC .
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $(2 \sin x + \cos x)^2 - 4 \cos x (\sin x - \cos x) = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x)) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Demonstrați că $A(2020 - x) + A(2020 + x) = 2A(2020)$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numărul natural n , pentru care $A(n)A(2 - n) = 2A(-6)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 5p a) Arătați că $N = \sqrt{33} * \sqrt{31}$ este un număr natural.
- 5p b) Determinați numărul $x \in M$ pentru care $(x * x * x)^2 = 300$.
- 5p c) Se consideră funcția $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x + y) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (-\infty, 0]$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{10}$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-3\ln x}{x^4}$ și $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\ln x}{x^3}$.
- 5p a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Calculați $\int_1^e f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_e^{e^2} x^2 F(x) dx = \frac{3}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 6$, $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 18$ $b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 6 + 18 = 26$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ Suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții este egală cu 5	2p 3p
3.	$4x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$ $x = 1$, care convine, $x = 9$, care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 50 de elemente, deci sunt 50 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt $50 - 7 = 43$ de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{43}{50}$	1p 2p 2p
5.	Punctul $M(-2, 3)$ este mijlocul laturii BC Ecuația medianei din A este $y = 3$	2p 3p
6.	$4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x - 4 \cos x \sin x + 4 \cos^2 x = 4 \Leftrightarrow 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 4$ $\cos^2 x = 0$, de unde obținem $x = \frac{\pi}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x \cdot x - (-3) \cdot 3 =$ $= x^2 - (-9) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$A(2020 - x) + A(2020 + x) = \begin{pmatrix} 2020 - x & 3 \\ -3 & 2020 - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2020 + x & 3 \\ -3 & 2020 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4040 & 6 \\ -6 & 4040 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2020 & 3 \\ -3 & 2020 \end{pmatrix} = 2A(2020)$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} n & 3 \\ -3 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - n & 3 \\ -3 & 2 - n \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n^2 + 2n - 9 & 6 \\ -6 & -n^2 + 2n - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ $n^2 - 2n - 3 = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$	3p 2p
2.a)	$N = \sqrt{\sqrt{33}^2 + \sqrt{31}^2} = \sqrt{33 + 31} =$ $= \sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N}$	3p 2p
b)	$x * x = x\sqrt{2}$, $x * x * x = x\sqrt{3}$, unde $x \in M$ $(x\sqrt{3})^2 = 300 \Leftrightarrow x^2 = 100$ și, cum $x \in M$, obținem $x = 10$	2p 3p

c)	$f(x+y) = \sqrt{-2020(x+y)} =$	2p
	$= \sqrt{-2020x + (-2020y)} = \sqrt{(f(x))^2 + (f(y))^2} = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (-\infty, 0]$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 5) - (x-2) \cdot 2x}{(x^2 + 5)^2} =$	3p
	$= \frac{5 + 4x - x^2}{(x^2 + 5)^2} = \frac{(5-x)(x+1)}{(x^2 + 5)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{x\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 5$	1p
	$x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f e descrescătoare pe $(-\infty, -1]$; $x \in [-1, 5] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f e crescătoare pe $[-1, 5]$ și $x \in [5, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f e descrescătoare pe $[5, +\infty)$	2p
	Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(5) = \frac{1}{10}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, obținem $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{10}$, pentru orice număr real x	2p
2.a)	$F'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^3}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(1-3\ln x)}{x^6} =$	3p
	$= \frac{1-3\ln x}{x^4} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	2p
b)	$\int_1^e f(x) dx = F(x) \Big _1^e = \frac{\ln x}{x^3} \Big _1^e =$	3p
	$= \frac{\ln e}{e^3} - \frac{\ln 1}{1^3} = \frac{1}{e^3}$	2p
c)	$\int_e^{e^2} x^2 F(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big _e^{e^2} =$	3p
	$= \frac{\ln^2 e^2 - \ln^2 e}{2} = \frac{2^2 - 1^2}{2} = \frac{3}{2}$	2p