Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)=-\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, astfel încât $f(x)+f(-x)=2020$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{1-x}=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cuprins între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

5p **6**. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 2, 3 și 4. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=\det\left(A+I_2\right)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A\cdot A\cdot A=aI_2$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\neq n$, pentru care $\det\left(A+mI_2\right)=\det\left(A+nI_2\right)$.

2. Pe mulțimea $M=(0,1)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy}{1-x-y+2xy}$.

5p **a)** Arătați că $x\circ\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $g'(x)+g(x)=\dfrac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f''(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x\,dx = e^2 + a$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)+\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \log_2\left(\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\right)=0$	**3p**
	Cum $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1=1$, obținem că $\log_2\left(\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\right)=0$	**2p**
2.	$f(x)+f(-x)=2020 \Leftrightarrow 2x+a+2\cdot(-x)+a=2020$	**3p**
	$2a=2020$, deci $a=1010$	**2p**
3.	$3^x+\dfrac{3}{3^x}=4 \Leftrightarrow 3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0 \Leftrightarrow \left(3^x-1\right)\left(3^x-3\right)=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale cuprinse între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$ sunt 12 și 13, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{90}=\dfrac{1}{45}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DA}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)+\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DA}=\vec{0}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=$	**3p**
	$=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$	**2p**
6.	Considerăm ΔABC cu $AB=2$, $AC=3$ și $BC=4 \Rightarrow \cos A=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\dfrac{1}{4}$	**3p**
	$\cos A<0$, deci unghiul A este obtuz	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-13\cdot(-1)=1$	**2p**
	$\det\left(A+I_2\right)=\begin{vmatrix}4 & 13\\ -1 & -3\end{vmatrix}=4\cdot(-3)-13\cdot(-1)=1$, deci $\det\left(A+I_2\right)=\det A$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-4 & -13\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
	$aI_2=I_2$, deci $a=1$	**2p**
c)	$\det\left(A+mI_2\right)=\begin{vmatrix}3+m & 13\\ -1 & -4+m\end{vmatrix}=m^2-m+1$, pentru orice număr natural m	**3p**
	$m^2-m+1=n^2-n+1 \Leftrightarrow (m-n)(m+n-1)=0$ și, cum m și n sunt numere naturale, $m\neq n$, obținem $m+n=1$, deci perechile sunt $(1,0)$ și $(0,1)$	**2p**

2.a)	$x\circ\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{1-x-\frac{1}{2}+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}}=$	**2p**
	$=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x$, pentru orice $x\in M$	**3p**
b)	$x\circ y=\frac{xy}{1-x-y+2xy}=\frac{yx}{1-y-x+2yx}=$	**2p**
	$=y\circ x$, pentru orice $x,\ y\in(0,1)$, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**3p**
c)	$f(x)\circ f(y)=\frac{f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+2f(x)f(y)}=\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{y}{y+1}}{1-\frac{x}{x+1}-\frac{y}{y+1}+2\cdot\frac{xy}{(x+1)(y+1)}}=$	**3p**
	$=\frac{xy}{xy+x+y+1-xy-x-yx-y+2xy}=\frac{xy}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(e^x+1)e^x-(e^x+x)e^x}{e^{2x}}=$	**3p**
	$=\frac{(e^x+1-e^x-x)e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ are panta $f'(1)=0$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, dreapta de ecuație $y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f și panta ei este 0, deci tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ și asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f sunt paralele	**3p**
c)	$f'(x)=(1-x)e^{-x}\Rightarrow f''(x)=(x-2)e^{-x}$, deci $g(x)=(x-2)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$g'(x)=(3-x)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$, deci $g'(x)+g(x)=(3-x)e^{-x}+(x-2)e^{-x}=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1(x^2+1)f(x)dx=\int_0^1(x^2+1)\left(4x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1(4x^3+2x+1)dx=$	**2p**
	$=(x^4+x^2+x)\Big\vert_0^1=1+1+1-0=3$	**3p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(4x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(2x^2-\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2-\ln 2+\operatorname{arctg}1-0+\ln 1-\operatorname{arctg}0=2-\ln 2+\frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\int_1^e\left(f(x)+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)\ln x\,dx=\int_1^e 4x\ln x\,dx=2x^2\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e 2x\,dx=2e^2-e^2+1=e^2+1$	**2p**
	$e^2+1=e^2+a$, deci $a=1$	**3p**