Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că modulul numărului complex $z=\frac{1+2i}{1-2i}$ este egal cu 1.

5p **2.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ este pară.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+2}=x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre divizibile cu 3.

5p **5.** În triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, ecuația mediatoarei laturii AC este $y=3x+1$ și ecuația perpendicularei din A pe BC este $2y=x+7$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6**. Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(a)\right)=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, pentru orice $a, b\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, astfel încât $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{3}xy+x+y$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$. Arătați că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstrați că $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=\frac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și orice numere reale $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ și x_n.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asimptote ale graficului funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^4\left(f(x)-f(-x)\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>4$, astfel încât $\displaystyle\int_4^a\frac{f(x)}{x}dx=10+\ln\frac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\lvert z\rvert=\frac{\lvert 1+2i\rvert}{\lvert 1-2i\rvert}=\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$	**2p**
2.	$f(-x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^x+\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^x=$	**3p**
	$=\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x=f(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția f este pară	**2p**
3.	$x+2=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, sau $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au ambele cifre divizibile cu 3 sunt $\overline{ab}$ cu $a\in\{3,6,9\}$ și $b\in\{0,3,6,9\}$, deci sunt 12 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$	**1p**
5.	Perpendiculara din A pe BC este și mediatoarea lui BC, deci coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC sunt soluțiile sistemului $\begin{cases}y=3x+1\\2y=x+7\end{cases}$	**3p**
	$x=1$, $y=4$	**2p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$-\sin x\cos x-\sin x\cos x=-1\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=1\Leftrightarrow \sin 2x=1$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(a)=\begin{vmatrix}1 & \ln a\\0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot\ln a=$	**2p**
	$=1-0=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & \ln a+\ln b\\0 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & \ln(ab)\\0 & 1\end{pmatrix}=A(ab)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=A\left(a^3\right)=\begin{pmatrix}1 & \ln a^3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & \ln a^3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow \ln a^3=2020\Leftrightarrow \ln a=\dfrac{2020}{3}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{e^{2020}}$, care convine	**3p**
2.a)	$x\circ y=\dfrac{1}{3}xy+x+y+3-3=\dfrac{1}{3}x(y+3)+(y+3)-3=$	**2p**
	$=(y+3)\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)-3=\dfrac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$f(x)\circ f(y)=\dfrac{1}{3}\big(f(x)+3\big)\big(f(y)+3\big)-3=\dfrac{1}{3}(3x-3+3)(3y-3+3)-3=$	**2p**
	$=3xy-3=f(xy)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$f\left(\dfrac{x+3}{3}\right)=3\cdot\dfrac{x+3}{3}-3=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci $x_k=f\left(\dfrac{x_k+3}{3}\right)$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$	**2p**
	$x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=f\left(\dfrac{x_1+3}{3}\right)\circ f\left(\dfrac{x_2+3}{3}\right)\circ\ldots\circ f\left(\dfrac{x_n+3}{3}\right)=f\left(\dfrac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)}{3^n}\right)=$ $=3\cdot\dfrac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)}{3^n}-3=\dfrac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și orice numere reale $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ și x_n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}\cdot\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\cdot\dfrac{-2}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=\sqrt{3}$, $f'(2)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{5}{\sqrt{3}}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=1$, deci dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f, de unde obținem că punctul de intersecție a celor două asimptote este $(1,1)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}$	**3p**

b)	$f(x)-f(-x)=x^2+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-(-x)^2-\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+9}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int_0^4 (f(x)-f(-x))dx=\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx=2\sqrt{x^2+9}\Big\|_0^4=2(5-3)=4$	**3p**
c)	$\int_4^a \frac{f(x)}{x}dx=\int_4^a\left(x+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\right)\Big\|_4^a=\frac{a^2-16}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$	**3p**
	$\frac{a^2-16}{2}=10$ și, cum $a>4$, obținem $a=6$	**2p**