Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(2+3i)^2 = i(5i+12)$, unde $i^2 = -1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$. Determinați numărul real a, astfel încât $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5\cdot 2^{x+1}\cdot 3^x = 12\cdot 5^x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$, care au proprietatea $f(1)\geq 3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră rombul $ABCD$ cu $A(-1,3)$ și $C(-2,4)$. Determinați panta dreptei BD.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=6^x$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că, orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X=A(1)$ are două elemente numere iraționale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2+xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ x\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră numerele reale a și b cu $a\neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x\circ a=x\circ b$.

5p **c)** Determinați numărul real x cu proprietatea că $x\circ(x+1)=-x^3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-(x+1)\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}-e$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n(x-f(x))dx$. Demonstrați că $I_n+nI_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4-9+12i=-5+12i=$	**3p**
	$=5i^2+12i=i(5i+12)$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=x+a+a=x+2a$, $f(x+1)=x+1+a$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x+2a=x+1+a\Rightarrow a=1$	**2p**
3.	$5\cdot 2\cdot 2^x\cdot 3^x=12\cdot 5^x\Leftrightarrow 10\cdot 6^x=12\cdot 5^x$	**3p**
	$\left(\frac{6}{5}\right)^x=\frac{6}{5}$, deci $x=1$	**2p**
4.	$f(1)$ poate fi aleasă în două moduri, iar $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în câte patru moduri	**3p**
	Există $4^2\cdot 2=32$ de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ astfel încât $f(1)\geq 3$	**2p**
5.	$m_{AC}=-1$	**2p**
	Cum $BD\perp AC$, obținem $m_{BD}=1$	**3p**
6.	$\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, deci $x=\frac{\pi}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{vmatrix}=2^x\cdot 3^x-0\cdot 0=$	**3p**
	$=(2\cdot 3)^x=6^x$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 2^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 3^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2^x & 2^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 3^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2^x=3^x$, de unde obținem $x=0$	**2p**
c)	$X\cdot X\cdot X=A(1)\cdot X$ și $X\cdot X\cdot X=X\cdot A(1)\Rightarrow A(1)\cdot X=X\cdot A(1)$, deci, pentru $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, unde a, b, c și d sunt numere reale, obținem $\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 3c & 3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 3b\\ 2c & 3d\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=0$ și $c=0$	**3p**
	$\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow a\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$ și $d\in\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$, deci orice matrice X, pentru care $X\cdot X=A(1)$, are două elemente numere iraționale	**2p**

2.a)	$x \circ x = x^2 + x \cdot x + x^2 =$	**3p**
	$= 3x^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$x^2 + xa + a^2 = x^2 + xb + b^2 \Leftrightarrow x(a-b) + \left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x+a+b) = 0$	**3p**
	Cum $a \neq b$, obținem $x = -a-b$	**2p**
c)	$x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$	**3p**
	$(x+1)^3 = 0$, de unde obținem $x = -1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} =$	**3p**
	$= 2 - \ln(x+1) - 1 = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e-1$	**2p**
	Pentru orice $x \in (-1, e-1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1, e-1]$ și pentru orice $x \in [e-1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e-1, +\infty)$	**3p**
c)	$f''(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
	Cum, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1} < 0$, obținem $f''(x) < 0$, deci f este concavă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - e^x\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - e^x\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{3}{2} - e$	**2p**
b)	$\int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x\left(x - e^x\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 - xe^x\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1 - (x-1)e^x\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	**2p**
c)	$I_n = \int_0^1 x^n\left(x - f(x)\right)dx = \int_0^1 x^n e^x\, dx = x^n e^x\Big\|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x\, dx =$	**3p**
	$= e - nI_{n-1}$, de unde obținem $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**