Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați partea întreagă a numărului $2+3\sqrt{5}$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$ și $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2+x$. Arătați că $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{3}$.
5p	**4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,30\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A care sunt divizibile cu 2 sau cu 3.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul G, centrul său de greutate și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$. Arătați că punctele M, N și G sunt coliniare.
5p	**6.** Arătaţi că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A=1-BC^2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=4$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^n A(x)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-7$.
5p	**a)** Arătați că $5\circ 2=0$.
5p	**b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=7+\log_7 x$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Demonstrați că $a^2\circ b^2\neq 0$, pentru orice numere întregi a și b.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x-5)$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
5p	**c)** Arătaţi că $e^{2x}\leq\frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

5p **c)** Determinați $a \in (1, +\infty)$ astfel încât $\int_0^x f(e^t) dt = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right) + \ln(a-1)$, pentru orice număr real x.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left[2+3\sqrt{5}\right]=2+\left[3\sqrt{5}\right]=2+\left[\sqrt{45}\right]$	**2p**
	$36<45<49\Rightarrow 6<3\sqrt{5}<7$, deci partea întreagă a numărului $2+3\sqrt{5}$ este egală cu 8	**3p**
2.	$(f\circ g)(x)=f(g(x))=g^2(x)-4g(x)+5=(2-x)^2-4(2-x)+5=x^2+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(f\circ h)(x)=f(h(x))=h^2(x)-4h(x)+5=(2+x)^2-4(2+x)+5=x^2+1$, pentru orice număr real x, deci $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$x+3+2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{3-x}+3-x=12\Rightarrow\sqrt{(x+3)(3-x)}=3\Rightarrow 9-x^2=9$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 15 numere divizibile cu 2 și 10 numere divizibile cu 3	**2p**
	Cum în mulțimea A sunt 5 numere care sunt divizibile și cu 2 și cu 3, obținem că în mulțimea A sunt $15+10-5=20$ de numere care sunt divizibile cu 2 sau cu 3	**3p**
5.	$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{12}\left(-5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right)$, unde D este mijlocul segmentului BC	**3p**
	$\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{15}\left(-5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right)=\frac{12}{15}\overrightarrow{MG}$, deci $\overrightarrow{MG}$ și $\overrightarrow{GN}$ sunt coliniari, de unde obținem că punctele M, N și G sunt coliniare	**2p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R$ și, cum $R=\frac{1}{2}$, obținem $BC=\sin A$	**3p**
	$\cos^2 A=1-\sin^2 A=1-BC^2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-0\cdot a=$	**3p**
	$=4-0=4$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ b & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2a+2b & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ a+b & 2\end{pmatrix}=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2A(1+2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^4A(1+2+3+4+5)=2^4A(15)$	**3p**
	$2^4\begin{pmatrix}2 & 0\\ 15 & 2\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}2 & 0\\ x & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow n=4$ și $x=15$	**2p**
2.a)	$5\circ 2=5+2-7=$	**3p**
	$=7-7=0$	**2p**

b)	$f(x)\circ f(y)=f(x)+f(y)-7=7+\log_7 x+7+\log_7 y-7=$ $=7+\log_7 x+\log_7 y=7+\log_7(xy)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
c)	$a^2\circ b^2=0\Leftrightarrow a^2+b^2=7$ Pentru $a,b\in\mathbb{Z}$ cu $\lvert a\rvert\geq 3$ sau $\lvert b\rvert\geq 3$, obținem $a^2+b^2\geq 9$, deci $a^2\circ b^2\neq 0$ Pentru $a,b\in\mathbb{Z}$ cu $\lvert a\rvert\leq 2$ și $\lvert b\rvert\leq 2$, obținem $a^2+b^2\in\{0,1,2,4,5,8\}\Rightarrow a^2+b^2\neq 7$, deci $a^2\circ b^2\neq 0$, pentru orice numere întregi a și b	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^{2x}\cdot 2\cdot(x-5)+e^{2x}\cdot 1=$ $=e^{2x}(2x-10+1)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}(2x-9)}{e^{2x}(x-5)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-9}{x-5}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{9}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}=2$	**3p** **2p**
c)	$x\in\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f descrescătoare pe $\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$ și $x\in\left[\frac{9}{2},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f crescătoare pe $\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$; obținem $f(x)\geq f\left(\frac{9}{2}\right)=-\frac{e^9}{2}$, pentru orice număr real x Cum $e^{2x}(x-5)\geq-\frac{e^9}{2}$ și $x-5<0$, pentru orice $x\in(-\infty,5)\Rightarrow e^{2x}\leq\frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^2 x\,dx=$ $=\frac{x^2}{2}\Big\|_0^2=\frac{4}{2}-0=2$	**2p** **3p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=$ $=\sqrt{x^2+1}\Big\|_1^2+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_1^2=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^x f(e^t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}}\cdot(e^t)'\,dt=\ln\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+1}\right)\Big\|_0^x=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, pentru orice număr real x $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)+\ln(a-1)$, pentru orice număr real x, deci $-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln(a-1)\Leftrightarrow a-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, de unde obținem $a=\sqrt{2}$, care convine	**3p** **2p**