Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1-3\sqrt{3}$ și rația $r=\sqrt{3}$. Arătați că partea fracționară a lui a_5 este egală cu $\sqrt{3}-1$.
5p	**2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Arătați că numărul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$ este natural.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(5x-1)=2\log_3(x+1)$.
5p	**4.** Determinați numărul de mulțimi X cu proprietatea $\{1,2,3\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că $2\vec{u}+3\vec{v}=\vec{0}$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC=8\sqrt{2}$. Arătați că raza cercului înscris în ΔABC este egală cu $4\left(2-\sqrt{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a\\a^2&a^3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(a)\right)=0$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A(2)+xI_2\right)=0$.
5p	**c)** Arătați că, dacă $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$, atunci $a=b$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2}$.
5p	**a)** Arătați că $0*8=4$.
5p	**b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” **nu** are element neutru.
5p	**c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\ln x\geq\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.
5p	**a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{10}{3}$.
5p	**b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ este o primitivă a funcției f.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_5 = a_1 + 4r = 1 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$	**2p**
	Cum $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2 < 1 + \sqrt{3} < 3$, obținem că $\{a_5\} = a_5 - [a_5] = 1 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1$	**3p**
2.	$f(-2) = f(2) = \sqrt{5}$, $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$	**3p**
	$f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) = \sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 1 = 10 \in \mathbb{N}$	**2p**
3.	$\log_3(5x-1) = \log_3(x+1)^2 \Rightarrow 5x - 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$	**3p**
	$x = 1$ sau $x = 2$, care convin	**2p**
4.	$\{1,2,3\} \subset X \Rightarrow 1,2,3 \in X$	**2p**
	$X \subset \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow X = \{1,2,3\}$, $X = \{1,2,3,4\}$, $X = \{1,2,3,5\}$ sau $X = \{1,2,3,4,5\}$, deci există 4 mulțimi X astfel încât $\{1,2,3\} \subset X \subset \{1,2,3,4,5\}$	**3p**
5.	$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(a\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + b\vec{j}) = (2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j}$	**2p**
	$(2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j} = \vec{0}$, deci $a = -3$ și $b = -2$	**3p**
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$, deci $AB = AC = 8$	**2p**
	$r = \frac{S}{p} = \frac{32}{4(2+\sqrt{2})} = 4(2 - \sqrt{2})$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 1 \cdot a^3 - a \cdot a^2 =$	**3p**
	$= a^3 - a^3 = 0$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(2) + xI_2 = \begin{pmatrix} 1+x & 2 \\ 4 & 8+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xI_2) = x^2 + 9x$, deci $x^2 + 9x = 0$	**3p**
	$x = -9$ sau $x = 0$	**2p**
c)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix}$, $A(b) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$\begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = b$	**2p**
2.a)	$0 * 8 = \sqrt[3]{0^2 + 8^2} =$	**3p**
	$= \sqrt[3]{64} = 4$	**2p**

b)	Dacă e este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”, atunci $e*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e*0=0\Rightarrow\sqrt[3]{e^2}=0$ și obținem $e=0$	**3p**
	Cum $0*8=4\neq 8$, $e=0$ nu este element neutru al legii de compoziție „$*$”, deci legea de compoziție „$*$” nu are element neutru	**2p**
c)	De exemplu, pentru $m=2k^3$ și $n=2k^3$, unde $k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m*n=\sqrt[3]{m^2+n^2}=\sqrt[3]{\left(2k^3\right)^2+\left(2k^3\right)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{8k^6}=2k^2\in\mathbb{N}^*$, deci există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\sqrt{x+1}\right)'=$	**2p**
	$=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$	**2p**
	Pentru $x\in\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right]$ și, pentru $x\in\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$ $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$	**3p**
c)	$\ln x\geq 1$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$ și f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(\ln x)\geq f(1)\Rightarrow \ln x-\sqrt{\ln x+1}\geq 1-\sqrt{2}\Rightarrow \ln x\geq\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1\frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{e^x}dx=\int_0^1\left(x^2-4x+5\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+5x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-2+5=\dfrac{10}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)$ și $F''(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)+e^x(2x-4)=e^x\left(x^2-2x+1\right)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$e^x(x-1)^2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci, pentru orice primitivă F a lui f, obținem $F''(x)\geq 0$, pentru orice număr real x, deci F este convexă	**2p**
c)	$F'(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)+e^x(2ax+b)=e^x\left(ax^2+(b+2a)x+c+b\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$ax^2+(b+2a)x+c+b=x^2-4x+5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, de unde obținem $a=1$, $b=-6$ și $c=11$	**2p**