

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că diferența numerelor $5 + 2\sqrt{3}$ și $(1 + \sqrt{3})^2$ este număr întreg.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 + 2x$. Determinați numerele reale m , pentru care $f(m) = g(m)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = \sqrt{2x + 5}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$, acesta să verifice inegalitatea $|a + 1| \geq 2$.
- 5p** 5. Se consideră A , B , C și D patru puncte coplanare, M mijlocul segmentului AD și N mijlocul segmentului BC . Arătați că $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.
- 5p** 6. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 1. Arătați că $4\sin A \cdot \sin B = AC \cdot BC$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a, b) = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2, 3)) = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci matricea $A(a, b)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(-1, \sqrt{2}) \cdot X = A(0, 0)$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 5xy + x + y$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 4 = 25$.
- 5p** b) Demonstrați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p** c) Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Se consideră dreapta d , asimptota spre $+\infty$ la graficul lui f . Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f , în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $[0, \sqrt{3}]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cos x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^{\pi} \frac{f(x)}{e^x} dx = 0$.

- 5p** b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.
- 5p** c) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$5 + 2\sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3}) =$ $= 5 + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} = 1$, care este număr întreg	3p 2p
2.	$2m + 1 = 2m^2 + 2m \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2}$ $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$	3p 2p
3.	$x^2 + 5x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $x = -4$, care nu convine, sau $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $ a + 1 \geq 2$ sunt 1, 2 și 3, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$, deci $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$	2p 3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$ și, cum $R = 1$, obținem $BC = 2\sin A$ și $AC = 2\sin B$ $4\sin A \cdot \sin B = 2\sin B \cdot 2\sin A = AC \cdot BC$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,3)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 3 - 3 = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b)) = \begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{vmatrix} = (a+1)(b-2) - b(a-1) = 2(b-a-1)$, pentru orice numere reale a și b $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow b - a - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \det(A(a,b)) \neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	3p 2p
c)	$A(-1, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$, $\det(A(-1, \sqrt{2})) = 2\sqrt{2}$, $(A(-1, \sqrt{2}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $X = (A(-1, \sqrt{2}))^{-1} \cdot A(0,0)$ și, cum $A(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, obținem $X = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	3p 2p

2.a)	$1 \circ 4 = 5 \cdot 1 \cdot 4 + 1 + 4 =$ $= 20 + 5 = 25$	2p 3p
b)	$x \circ 0 = 5x \cdot 0 + x + 0 = x$, pentru orice număr întreg x $0 \circ x = 5 \cdot 0 \cdot x + 0 + x = x$, pentru orice număr întreg x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	2p 3p
c)	$x \in \mathbb{Z}$ element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ \circ ” \Leftrightarrow există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = 0 \Leftrightarrow 5xx' + x + x' = 0$, deci $x' = \frac{-x}{5x+1}$ și, cum $x, x' \in \mathbb{Z}$, obținem $5x+1 = -1$ sau $5x+1=1$ $x = -\frac{2}{5}$, care nu convine, sau $x=0$, care convine	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$ $= \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1$, deci panta dreptei d este 1 Tangenta la graficul lui f în $A(a, f(a))$ are panta 1, dacă $f'(a) = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2(a^2+3)}{(a^2+1)^2} = 1$, de unde obținem $a^2 = 1$, deci $a = -1$ sau $a = 1$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}, x \in \mathbb{R}$ Cum $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, \sqrt{3}]$, obținem că funcția f este convexă pe $[0, \sqrt{3}]$	2p 3p
2.a)	$\int_0^{\pi} \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^{\pi} \frac{e^x \cos x}{e^x} dx = \int_0^{\pi} \cos x dx =$ $= \sin x \Big _0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$	2p 3p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\cos x)' dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + e^x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx =$ $= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$	3p 2p
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x+\frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{e^x \cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \Big _0^{\frac{\pi}{3}} =$ $= e^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) - e^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos 0) = e^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{2} - e^{\frac{\pi}{2}} \ln 1 = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$	3p 2p