

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Test 19

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$ , știind că  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+\sqrt{8}} = a + b\sqrt{2}$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ . Arătați că  $f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = 3$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x - 4^{\frac{2x+3}{2}} = -7$ .
- 5p 4. Determinați numărul de funcții  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$  cu proprietatea că  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră paralelogramul  $ABCD$  cu  $A(-1, 3)$ ,  $B(3, 5)$  și  $C(-4, -2)$ . Determinați ecuația dreptei  $AD$ .
- 5p 6. Determinați  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , știind că  $\operatorname{tg} 2x = -1$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ 2x - y + az = 2 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1)) = 18$ .
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $a$  pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p c) Pentru  $a = 1$ , rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy - x - y + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$ , astfel încât  $a * x = a$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p c) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ . Demonstrați că  $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \ln(2^x + 1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că funcția  $f$  este crescătoare.
- 5p c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+2)\sin x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = 1$ .

**5p** b) Calculați  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

**5p** c) Determinați numărul natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , pentru care  $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \frac{1}{9}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 19

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1 + 3 - 2\sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$	2p
	Cum $a$ și $b$ sunt numere raționale $4 - \sqrt{2} = a + b\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 4$ și $b = -1$	3p
2.	$f(2020) = \frac{2020^2 + 2}{2020^2 + 1}$	2p
	$f\left(\frac{1}{2020}\right) = \frac{2 \cdot 2020^2 + 1}{2020^2 + 1} \Rightarrow f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = \frac{2020^2 + 2}{2020^2 + 1} + \frac{2 \cdot 2020^2 + 1}{2020^2 + 1} = \frac{3(2020^2 + 1)}{2020^2 + 1} = 3$	3p
3.	$2^{2x} - 2^{2x+3} = -7 \Leftrightarrow 2^{2x}(1 - 2^3) = -7 \Leftrightarrow 2^{2x} = 1$	3p
	$x = 0$	2p
4.	Sunt $3^3 = 27$ de funcții $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$	2p
	Deoarece numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ pentru care $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \neq 0$ este egal cu $2^3 = 8$ , obținem că numărul de funcții $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ cu proprietatea că $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$ este egal cu $27 - 8 = 19$	3p
5.	$AD \parallel BC \Rightarrow m_{AD} = m_{BC}$ , deci $m_{AD} = 1$	3p
	Ecuția dreptei $AD$ este $y - 3 = 1 \cdot (x + 1)$ , deci $y = x + 4$	2p
6.	$\operatorname{tg} 2x = -1$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , deci $2x = \frac{7\pi}{4}$	3p
	$x = \frac{7\pi}{8}$	2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 1 + 0 + 12 - (-2) - (-3) - 0 = 18$	3p
b)	Sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$	2p
	$\det(A(a)) = a + 17$ , deci $\det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-17\}$	3p
c)	Pentru $a = 1$ , obținem $\det(A(1)) = 18 \neq 0$ , deci sistemul de ecuații are soluție unică	2p
	Soluția sistemului de ecuații este $(1, 1, 1)$	3p
2.a)	$2 * \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 =$	3p
	$= 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$	2p

<b>b)</b>	$a * x = a \Leftrightarrow 2ax - a - x + 1 = a \Leftrightarrow (2a - 1)(x - 1) = 0$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b>
	$a = \frac{1}{2}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(x * y) = 2(x * y) - 1 = 2(2xy - x - y + 1) - 1 = 4xy - 2x - 2y + 2 - 1 =$	<b>3p</b>
	$= 4xy - 2x - 2y + 1 = (2x - 1)(2y - 1) = f(x)f(y)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = x' - (\ln(2^x + 1))' =$	<b>2p</b>
	$= 1 - \frac{1}{2^x + 1} \cdot (2^x + 1)' = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$0 < \frac{2^x}{2^x + 1} < 1$ , pentru orice număr real $x$ și $0 < \ln 2 < 1$ , deci $\frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} < 1$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} > 0$ , pentru orice număr real $x$ , deci $f$ este crescătoare	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{\ln(2^x + 1)}{x} \right) = 1 - 0 = 1$	<b>2p</b>
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(2^x + 1)) = -\ln 1 = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției $f$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x+2)\sin x}{x+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} =$	<b>3p</b>
	$= -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)(\cos x)' dx = -(x+2)\cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$	<b>3p</b>
	$= -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\cos \frac{\pi}{2} + (0+2)\cos 0 + \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 3$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{\frac{1}{n}(x+2)^2 \sin^2 x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\frac{1}{n}(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} \Big _{\frac{1}{n}}^1 = -\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1}$ , pentru orice număr	<b>3p</b>
	natural $n$ , $n \geq 2$ $-\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{9}$ , deci $n = 4$ , care convine	<b>2p</b>