Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_2=2$.
5p	**2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,a^2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-4$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-5x+7}=x-1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
5p	**5.** Determinați numărul real m, pentru care vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+5\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Arătați că $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați perechile de numere naturale (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(6)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy-x-y+2$.
5p	**a)** Arătați că $x\circ y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x\le5$.
5p	**c)** Calculați $1^n\circ2^n\circ3^n\circ\ldots\circ2020^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $e^x-x^e=0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+2)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^3\dfrac{f(x)}{e^x}dx=18$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^n\dfrac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\dfrac{3\ln2}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1 + a_3 = 2a_2$	**2p**
	$a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2 = 6$	**3p**
2.	$f(a) = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$	**3p**
	$a = 2$	**2p**
3.	$x^2 - 5x + 7 = (x-1)^2$	**2p**
	$3x = 6$, deci $x = 2$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{9}{90} = \dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$\dfrac{m}{3} = \dfrac{5}{3}$	**3p**
	$m = 5$	**2p**
6.	$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x =$	**2p**
	$= 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2 \cdot 1 = 2$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) =$	**3p**
	$= -12 + 12 = 0$	**2p**
b)	$M(x)M(y) = (I_2 + xA)(I_2 + yA) = I_2 + xA + yA + xyAA$	**3p**
	Cum $AA = A$, obținem $M(x)M(y) = I_2 + (x + y + xy)A = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$M(m + n + mn) = M(6) \Leftrightarrow m + n + mn = 6$	**2p**
	$(m+1)(n+1) = 7$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(6,0)$ sau $(0,6)$	**3p**
2.a)	$x \circ y = xy - x - y + 1 + 1 =$	**2p**
	$= x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x \circ x = (x-1)^2 + 1$, de unde obținem $(x-1)^2 \leq 4$	**2p**
	$x \in [-1, 3]$	**3p**
c)	$1 \circ x = 1$, unde x este număr real	**2p**
	$1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2020^n = 1 \circ \left(2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2020^n\right) = 1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-e(\ln x)'=$	**3p**
	$=1-e\cdot\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=x\Leftrightarrow f'(a)=1$	**3p**
	$\frac{a-e}{a}=1\Leftrightarrow a-e=a\Leftrightarrow e=0$, ceea ce este imposibil, deci graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,e)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,e)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(e,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e,+\infty)$	**2p**
	$e^x-x^e=0\Leftrightarrow f(x)=0$ și, cum $f(e)=0$, ecuația $e^x-x^e=0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^3 x(x+2)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=9+9-0=18$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+2x\right)e^x dx=\left.\left(x^2+2x\right)e^x\right\|_0^1-\int_0^1(2x+2)e^x dx=$	**2p**
	$=3e-\left.(2x+2)e^x\right\|_0^1+\int_0^1 2e^x dx=3e-4e+2+2e-2=e$	**3p**
c)	$\int_1^n\frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\int_1^n\frac{x+1}{x^2+2x}dx=\left.\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)\right\|_1^n=\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+2n}{3}$	**3p**
	$\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+2n}{3}=\frac{3\ln 2}{2}\Rightarrow n^2+2n-24=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=4$	**2p**