Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră a un număr real. Arătați că numărul $z=(a+2i)^2+(a-2i)^2$ este real, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{2x}{x^2+1}$. Arătați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{\frac{x+1}{2}}=2\cdot 2^x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care sunt strict crescătoare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $ax+y-5=0$, unde a este număr real și $x-4y+3=0$. Determinați numărul real a pentru care cele două drepte sunt paralele.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+z=1\\y+z=2\\x+y=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că matricea $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ este inversa matricei A.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $z_1\circ z_2=iz_1z_2+z_1+z_2$.

5p **a)** Arătați că $i\circ i=i$.

5p **b)** Demonstrați că $z_1\circ z_2=i(z_1-i)(z_2-i)+i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Demonstrați că simetricul numărului $\frac{1}{2}(1+i)$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr real.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-n\ln x+1$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{n(x^n-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^n}{x}=0$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție în intervalul $(0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}\,dx$.

5p **c)** Arătați că $15\int_0^1 f^7(x)\,dx-14\int_0^1 f^6(x)\,dx=128$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=a^2+4ai-4+a^2-4ai-4=$	**3p**
	$=2a^2-8\in\mathbb{R}$	**2p**
2.	$f(x)-1=-\frac{2x}{x^2+1}-1=-\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=-\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$	**3p**
	Cum $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$, pentru orice număr real x, obținem $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$\sqrt{3}^{x+1}=2^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1}=1$	**3p**
	$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
4.	Numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care sunt strict crescătoare este egal cu $C_4^3=$	**3p**
	$=\frac{4!}{3!(4-3)!}=4$	**2p**
5.	Dreapta de ecuație $ax+y-5=0$ are panta egală cu $-a$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x-4y+3=0$ are panta egală cu $\frac{1}{4}$, deci $a=-\frac{1}{4}$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}x+\frac{3}{\operatorname{tg}x}=2\sqrt{3}\Rightarrow\operatorname{tg}^2x-2\sqrt{3}\operatorname{tg}x+3=0\Rightarrow\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)^2=0$	**3p**
	$\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci $x=\frac{\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-1-1-0=-2$	**3p**
b)	$A\cdot B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$	**3p**
	$B\cdot A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=I_3$, deci B este inversa matricei A	**2p**

c)	$\det A \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(\frac{a-1}{2},\frac{a+1}{2},\frac{3-a}{2}\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$	**3p**
	$2\cdot\frac{a+1}{2}=\frac{a-1}{2}+\frac{3-a}{2} \Leftrightarrow 2a+2=2 \Leftrightarrow a=0$	**2p**
2.a)	$i \circ i = i\cdot i\cdot i+i+i=$	**3p**
	$=-i+2i=i$	**2p**
b)	$z_1 \circ z_2 = iz_1z_2+z_1+z_2-i+i=iz_1(z_2-i)+(z_2-i)+i=$	**3p**
	$=(z_2-i)(iz_1+1)+i=i(z_1-i)(z_2-i)+i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2	**2p**
c)	$z\circ 0=z$, $0\circ z=z$, pentru orice număr complex z, deci 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**2p**
	$z\circ z'=0 \Leftrightarrow i(z-i)(z'-i)+i=0 \Leftrightarrow (z-i)(z'-i)=-1$, deci $z'=-\frac{1}{z-i}+i$ și, cum $z=\frac{1}{2}(1+i)$, obținem $z'=-\frac{2}{1+i-2i}+i=\frac{-1+i}{1-i}=-1$, care este număr real	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=nx^{n-1}-n\cdot\frac{1}{x}=n\left(x^{n-1}-\frac{1}{x}\right)=$	**3p**
	$=n\cdot\frac{x^n-1}{x}=\frac{n\left(x^n-1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^n}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n-n\ln x+1-x^n}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-n\ln x+1}{x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-n\cdot\frac{1}{x}}{1}=0$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
c)	Pentru orice $x\in(0,1]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(1)=2$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x)=a$ are soluție în intervalul $(0,1] \Leftrightarrow a\in[2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+3=12$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)e^{x^3+3x}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left(x^3+3x\right)'e^{x^3+3x}dx=\left.\frac{1}{3}e^{x^3+3x}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\left(e^4-e^0\right)=\frac{e^4-1}{3}$	**2p**
c)	$\int_0^1 f^7(x)dx=\int_0^1 x'\left(x^2+1\right)^7dx=\left.x\left(x^2+1\right)^7\right\|_0^1-\int_0^1 14x^2\left(x^2+1\right)^6dx=2^7-14\int_0^1\left(x^2+1-1\right)\left(x^2+1\right)^6dx=$	**3p**
	$=128-14\int_0^1\left(x^2+1\right)^7dx+14\int_0^1\left(x^2+1\right)^6dx$, deci $15\int_0^1 f^7(x)dx-14\int_0^1 f^6(x)dx=128$	**2p**