

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și $b_2 = 2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Determinați numerele naturale x , pentru care $f(x) < 7$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 8} = x + 2$.
- 5p** 4. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(4,4)$, $C(1,a)$ și $D(2,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , pentru care dreptele AB și CD sunt paralele.
- 5p** 6. Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC , în care $AB = 10$ și $\cos B = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(x)A(y) = A(x + y + 3xy)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale a pentru care $A(a)A(a) = A(5)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5(x + y - 4) - xy$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = -(x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * x \geq x$.
- 5p** c) Calculați $1 * (-2) * 3 * (-4) * \dots * 2019 * (-2020)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^2 e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -x(x + 2)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $0 \leq \frac{(x + 2)(y + 2)}{\sqrt{e^{x+y}}} \leq 4$, pentru orice $x, y \in [-2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \frac{1}{4}$.
- 5p** b) Calculați $\int_1^2 \frac{1}{x^2} f(x) dx$.
- 5p** c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este $q = 2$ $b_3 = 1 \cdot 2^2 = 4$	3p 2p
2.	$3x + 1 < 7 \Leftrightarrow x < 2$ Cum x este număr natural, obținem $x = 0$ sau $x = 1$	2p 3p
3.	$x^2 + 8 = (x + 2)^2$ $x = 1$, care convine	2p 3p
4.	$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$ $= 6$	3p 2p
5.	$m_{AB} = 1$, $m_{CD} = 1 - a$, unde a este număr real $m_{AB} = m_{CD} \Leftrightarrow 1 - a = 1 \Leftrightarrow a = 0$	2p 3p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{BC}$ $BC = 20$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 =$ $= 6 - 2 = 4$	3p 2p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1+x+y+xy+2xy & y+xy+x+2xy \\ 2x+2xy+2y+4xy & 2xy+1+2x+2y+4xy \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+(x+y+3xy) & x+y+3xy \\ 2(x+y+3xy) & 1+2(x+y+3xy) \end{pmatrix} = A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$A(a+a+3a \cdot a) = A(5) \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 5 = 0$ $a = -\frac{5}{3}$ sau $a = 1$	3p 2p
2.a)	$x * y = -xy + 5x + 5y - 25 + 5 =$ $= -x(y-5) + 5(y-5) + 5 = -(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$-(x-5)^2 + 5 \geq x \Leftrightarrow (x-5)(x-4) \leq 0$ $x \in [4, 5]$	3p 2p
c)	$x * 5 = x$ și $5 * y = y$, unde x și y sunt numere reale $1 * (-2) * 3 * (-4) * 5 * \dots * 2019 * (-2020) = ((1 * (-2) * 3 * (-4)) * 5) * (-6) * \dots * 2019 * (-2020) =$ $= 5 * ((-6) * \dots * 2019 * (-2020)) = 5$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2(x+2)e^{-x} + (x+2)^2 e^{-x} \cdot (-1) =$ $= (-x^2 - 2x)e^{-x} = -x(x+2)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+2)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ <p>Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f</p>	3p
		2p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-2, 0] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-2, 0]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = 4$, obținem $f(x) \leq 4$, pentru orice $x \in [-2, +\infty)$ $x, y \in [-2, +\infty) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4$ și $0 \leq f(y) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq f(x)f(y) \leq 16 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{f(x)f(y)} \leq 4$, de unde obținem $0 \leq \frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}} \leq 4$, pentru orice $x, y \in [-2, +\infty)$	3p
		2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$	3p
		2p
b)	$\int_1^2 \frac{1}{x^2} f(x) dx = \int_1^2 x e^x dx = (x-1)e^x \Big _1^2 =$ $= e^2$	3p
		2p
c)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , deci $F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = x^2(x+3)e^x, x \in \mathbb{R}$ $F''(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -3)$, $F''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-3, 0)$ și pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F are un singur punct de inflexiune	2p
		3p