

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(0,2 \cdot 10 - 1)(0,2 \cdot 10 + 1) = 3$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = x$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{6-x} = \sqrt{x+14}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților.
- 5p 5. Determinați numărul real a , pentru care $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, unde $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
- 5p 6. Arătați că $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, știind că $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + y + az = 4, \\ -3x - y + z = 1 \end{cases}$$
 unde a este număr real și $A(a)$ matricea coeficienților sistemului.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Pentru $a = -1$, determinați soluția sistemului de ecuații.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr rațional p , matricea $A(p)$ este inversabilă pentru orice număr rațional p .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = xy - 101x - 101y + 10302$.
- 5p a) Arătați că $x * y = (x - 101)(y - 101) + 101$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea „*”.
- 5p c) Determinați numerele întregi x și y , cu $x < y$, pentru care $x * y = 202$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 5$.
- 5p a) Determinați panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p b) Demonstrați că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
- 5p c) Demonstrați că $e^x(1-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) dx = 4$.
- 5p b) Calculați $\int_2^6 \frac{2}{f(x)} dx$.
- 5p c) Determinați numărul real nenul a , știind că $\int_1^e \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{a}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|----|---|----------------|
| 1. | $(0,2 \cdot 10 - 1)(0,2 \cdot 10 + 1) = (2 - 1)(2 + 1) =$ $= 1 \cdot 3 = 3$ | 3p 2p |
| 2. | $x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$ sau $x = 2$ | 3p 2p |
| 3. | $4(6 - x) = x + 14 \Rightarrow 24 - 4x = x + 14 \Leftrightarrow 5x = 10$ $x = 2$, care convine | 3p 2p |
| 4. | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$ | 1p 2p 2p |
| 5. | $\vec{u} + \vec{v} = (a + 2)\vec{i} + (a + 2)\vec{j}$ $a = -2$ | 3p 2p |
| 6. | Cum $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ | 3p 2p |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

| | | |
|------|---|----------|
| 1.a) | $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$ | 3p 2p |
| b) | $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y - z = 4 \\ -3x - y + z = 1 \end{cases}$ și $\det(A(-1)) = -1 \neq 0$, deci sistemul de ecuații admite soluție unică $x = -5$, $y = -6$, $z = -20$ | 2p 3p |
| c) | $A(p) = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 2 & 1 & p \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(p)) = -3p^2 - p + 1$, unde p este număr rațional $-3p^2 - p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q}$ sau $p = -\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q}$, deci, pentru orice număr rațional p , $\det(A(p)) \neq 0$, adică matricea $A(p)$ este inversabilă | 2p 3p |
| 2.a) | $x * y = xy - 101x - 101y + 10201 + 101 = x(y - 101) - 101(y - 101) + 101 =$ $= (x - 101)(y - 101) + 101$, pentru orice numere reale x și y | 3p 2p |

| | | |
|-----------|--|------------------------|
| b) | Elementul neutru al legii „*” este $e = 102$ $x = x' \Leftrightarrow x * x = 102 \Leftrightarrow (x - 101)^2 = 1$, de unde obținem $x = 100$ sau $x = 102$ | 2p 3p |
| c) | $x * y = 202 \Leftrightarrow (x - 101)(y - 101) + 101 = 202 \Leftrightarrow (x - 101)(y - 101) = 101$ Cum x și y sunt numere întregi cu $x < y$ și 101 este număr prim, obținem $x = 0$ și $y = 100$ sau $x = 102$ și $y = 202$ | 2p 3p |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

| | | |
|-------------|---|-------------------------------------|
| 1.a) | $f'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$ Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f este egală cu $f'(0) = e^0 - 1 = 0$ | 3p 2p |
| b) | $f''(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) > 0$, pentru orice număr real x , deci funcția f este convexă pe \mathbb{R} | 2p 3p |
| c) | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -4$, obținem $f(x) \geq -4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) \geq -4$, deci $e^{-x} \geq -x + 1$, de unde $e^x(1 - x) \leq 1$, pentru orice număr real x | 1p 2p 2p |
| 2.a) | $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2 + 4}{x} - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 =$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ | 3p 2p |
| b) | $\int_2^6 \frac{2}{f(x)} dx = \int_2^6 \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \ln(x^2 + 4) \Big _2^6 =$ $= \ln 40 - \ln 8 = \ln 5$ | 3p 2p |
| c) | $\int_1^e \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$ $\frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{a}$, deci $a = 4$ | 3p 2p |