

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 5$ și rația $r = 2$.
- 5p** 2. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2 - ax + a - 1 = 0$ are soluții reale distincte.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3 - \sqrt[3]{x^2 + x + 2} = 1$.
- 5p** 4. Calculați $2C_4^3 - 3A_4^2$.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + (a^2 + 1)\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB = 8$, $BC = 8$ și aria egală cu 16. Determinați măsura unghiului B .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x, y) = xI_2 + yA$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p** b) Demonstrați că $M(x, y) \cdot M(a, b) = M(xa + yb, xb + ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y .
- 5p** c) Determinați perechile (x, y) de numere reale, știind că $\det(M(x, y)) = 4$ și suma elementelor matricei $M(x, y) \cdot M(x, y)$ este egală cu 8.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 1$ și $x \circ y = xy - x - y + 2$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ (1 * 3) = (2 \circ 1) * (2 \circ 3)$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $3^{x \circ x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x * x}$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y pentru care $(x - 1) * (2y + 1) = 2$ și $(x + y) \circ 4 = 10$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2 - x + \sqrt{x^2 + 3}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Arătați că funcția f este continuă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Arătați că, pentru orice număr real a , $a > 1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ nu este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + x + 1$ și $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{2x}$.
- 5p** a) Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g .

5p b) Calculați $\int_1^4 g(x) dx$.

5p c) Determinați numărul real m , $m > 1$, pentru care $\int_1^m f(x) \cdot g(x) dx = 20$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_{șt-nat}*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{(2a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = \frac{(2 \cdot 5 + 4 \cdot 2) \cdot 5}{2} =$ $= 45$	3p 2p
2.	$\Delta = a^2 - 4(a - 1) = (a - 2)^2$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	2p 3p
3.	$\sqrt[3]{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ $x = -3$ sau $x = 2$	3p 2p
4.	$2C_4^3 - 3A_4^2 = 2 \cdot \frac{4!}{3!(4-3)!} - 3 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} =$ $= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 3 = 8 - 36 = -28$	2p 3p
5.	$\frac{1}{2} = \frac{a}{a^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$ $a = 1$	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin B}{2}$ $\sin B = \frac{1}{2}$ și, cum triunghiul ABC este ascuțitunghic, obținem că unghiul B are măsura de 30°	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 =$ $= 0 - 1 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $M(x, y) \cdot M(a, b) = (xI_2 + yA)(aI_2 + bA) = xaI_2 + xbA + yaA + ybA \cdot A = (xa + yb)I_2 + (xb + ya)A =$ $= M(xa + yb, xb + ya)$ pentru orice numere reale a, b, x și y	2p 3p
c)	$\det(M(x, y)) = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - y^2$, pentru orice numere reale x și y , deci $(x - y)(x + y) = 4$ $M(x, y) \cdot M(x, y) = M(x^2 + y^2, 2xy) \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + 2xy) = 8$, deci $(x + y)^2 = 4$ $x + y = x - y = -2$ sau $x + y = x - y = 2$, deci perechile sunt $(-2, 0)$ sau $(2, 0)$	1p 2p 2p
2.a)	$2 \circ (1 * 3) = 2 \circ (1 + 3 - 1) = 2 \circ 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 + 2 = 3$ $(2 \circ 1) * (2 \circ 3) = (2 \cdot 1 - 2 - 1 + 2) * (2 \cdot 3 - 2 - 3 + 2) = 1 * 3 = 1 + 3 - 1 = 3 = 2 \circ (1 * 3)$	2p 3p
b)	$x \circ x = x^2 - 2x + 2$ și $x * x = 2x - 1$, pentru orice număr real x $3^{x \circ x} = (3^{-2})^{x * x} \Leftrightarrow x \circ x = -2 \cdot (x * x) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$, deci $x = -2$ sau $x = 0$	2p 3p

c)	$(x-1) \cdot (2y+1) = 2 \Leftrightarrow x+2y=3$ și $(x+y) \circ 4 = 10 \Leftrightarrow x+y=4$ Obținem $x=5$, $y=-1$	3p 2p
----	---	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (5x-3) = 2$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - x + \sqrt{x^2 + 3}) = 2$ și $f(1) = 2$, deci $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$ Cum f este continuă pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, +\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R}	3p 2p
b)	$f'(x) = 2x - 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in (1, +\infty)$ Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum $f'(a) > 0$, pentru orice $a \in (1, +\infty)$, obținem că $f'(a) \neq 0$, deci tangenta la graficul funcției f în punctul A nu este paralelă cu axa Ox , pentru orice $a \in (1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = 2 + \frac{3}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in (1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 =$ $= \frac{\sqrt{x} + 2x}{2x} = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	3p 2p
b)	$\int_1^4 g(x) dx = f(x) \Big _1^4 = f(4) - f(1) =$ $= 7 - 3 = 4$	3p 2p
c)	$\int_1^m f(x) \cdot g(x) dx = \int_1^m f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) \Big _1^m = \frac{1}{2} (f^2(m) - f^2(1))$ $f^2(m) - 9 = 40 \Leftrightarrow f(m) = -7$, care nu convine sau $f(m) = 7$, de unde obținem $m = 4$	3p 2p