

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și $b_2 = 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 11x + 6$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care punctele $A(x, f(x))$ sunt situate sub axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x) - \lg(7-x) = -1$.
- 5p 4. Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 + C_n^2 = 6$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2a-1, a^2)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care punctul A aparține dreptei d de ecuație $y = x + 4$.
- 5p 6. Determinați $\cos 2x$, știind că x este număr real și $\sin x = \frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ ax + y + z = 3 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -9$.
- 5p b) Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a) = A(a) \cdot A(a)$ nu depinde de numărul real a .
- 5p c) Pentru $a = -2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + m(x + y)$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $(-1) * 1 = -1$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Demonstrați că $x * y = (x + m)(y + m) - m^2$, pentru orice numere reale x , y și m .
- 5p c) Pentru $m = -1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x * 5^{x+1} = -1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.
2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + e^x + m$, unde m este număr real, și $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x + e^x + 4x + 1$.
- 5p a) Determinați numărul real m astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f .

5p b) Pentru $m = 4$, calculați $\int_1^e f(x) dx$.

5p c) Pentru $m = 0$, calculați $\int_1^2 x f(x) dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|----|--|----------|
| 1. | Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este $q = 2$ $S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$ | 2p 3p |
| 2. | $f(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 6 < 0$ $\Delta = 49$, deci $x \in \left(\frac{2}{3}, 3\right)$ | 2p 3p |
| 3. | $\lg \frac{1-x}{7-x} = -1 \Rightarrow \frac{1-x}{7-x} = \frac{1}{10}$ $x = \frac{1}{3}$, care convine | 3p 2p |
| 4. | $n + \frac{n(n-1)}{2} = 6 \Leftrightarrow n^2 + n - 12 = 0$ Cum n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $n = 3$ | 3p 2p |
| 5. | $A(2a-1, a^2) \in d \Leftrightarrow a^2 = 2a - 1 + 4$ $a^2 - 2a - 3 = 0$, deci $a = -1$ sau $a = 3$ | 2p 3p |
| 6. | $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^2 =$ $= 1 - 2 \cdot \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$ | 2p 3p |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

| | | |
|------|---|----------|
| 1.a) | $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -2 + (-2) + 1 - 4 - 1 - 1 = -9$ | 2p 3p |
| b) | $B(a) = A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 2-2a & -3 & -3 \\ a-1 & 6 & -3 \\ 2a+1 & a-1 & -2a+2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a Suma elementelor matricei $B(a)$ este egală cu 0, deci nu depinde de numărul real a | 3p 2p |
| c) | Pentru $a = -2$, sistemul devine $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \end{cases}$ Adunând cele trei ecuații ale sistemului $(x + y - 2z) + (x - 2y + z) + (-2x + y + z) = 1 + 2 + 3$, obținem $0 = 6$, fals, deci sistemul de ecuații este incompatibil | 2p 3p |

| | | |
|-------------|--|------------------------|
| 2.a) | $(-1) * 1 = (-1) \cdot 1 + m((-1) + 1) =$ $= -1 + m \cdot 0 = -1$, pentru orice număr real m | 3p 2p |
| b) | $x * y = xy + mx + my + m^2 - m^2 =$ $= x(y + m) + m(y + m) - m^2 = (x + m)(y + m) - m^2$, pentru orice numere reale x, y și m | 2p 3p |
| c) | $(5^x - 1)(5^{x+1} - 1) - 1 = -1 \Leftrightarrow 5^x - 1 = 0$ sau $5^{x+1} - 1 = 0$ $x = 0$ sau $x = -1$ | 2p 3p |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

| | | |
|-------------|---|------------------------|
| 1.a) | $f'(x) = 2 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' + \frac{1}{x^2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^2} =$ $= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$ | 3p 2p |
| b) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f | 3p 2p |
| c) | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x^2(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{2}$ | 3p 2p |
| 2.a) | $F'(x) = \frac{1}{x} + e^x + 4$, $x \in (0, +\infty)$ F este primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci $m = 4$ | 3p 2p |
| b) | $\int_1^e f(x) dx = F(x) \Big _1^e = F(e) - F(1) =$ $= e^e + 3e - 3$ | 3p 2p |
| c) | $\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 x \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \int_1^2 (1 + xe^x) dx = \left(x + (x-1)e^x \right) \Big _1^2 =$ $= 2 + e^2 - 1 = e^2 + 1$ | 3p 2p |