Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=2$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2+mx-m=0$ **nu** are soluții reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-20}=\dfrac{1}{81}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n!\le n(n-1)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(0,4)$ și $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6**. Determinați numărul real a, $a>1$, știind că $a-1$, $2a$ și $2a+1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(e)\right)=e$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\det\left(A(a)\cdot A(a)\right)$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele $a, b\in(0,+\infty)$ pentru care $A(a)+A(b)=2A(a)\cdot A(b)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-3\sqrt{2}(x+y)+6+\sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 1=\sqrt{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\dfrac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+3^x-4, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{x^2-x+1}{x^2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)\,dx=5$.

5p **b)** Calculați $\int_0^2 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este concavă.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\frac{1}{\log_2 3}=\log_2\frac{63}{7}\cdot\frac{1}{\log_2 3}=$	**2p**
	$=\log_2 3^2\cdot\frac{1}{\log_2 3}=2\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}=2$	**3p**
2.	$\Delta=m^2+4m$, deci ecuația nu are soluții reale $\Leftrightarrow m^2+4m<0$	**3p**
	$m\in(-4,0)$	**2p**
3.	$3^{x^2-20}=3^{-4}\Leftrightarrow x^2=16$	**3p**
	$x=-4$ sau $x=4$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	$n!\le n(n-1)\Rightarrow n=2$ sau $n=3$, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+4\vec{j}$ și $\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+b\vec{j}$, unde $C(a,b)$, deci $a\vec{i}+b\vec{j}=4\vec{i}+4\vec{j}$	**3p**
	$a=4$, $b=4$	**2p**
6.	Cum triunghiul este dreptunghic, $2a+1>a-1$ și $2a+1>2a\Rightarrow(2a+1)^2=(2a)^2+(a-1)^2$, deci $a^2-6a=0$	**2p**
	Cum a este număr real, $a>1$, obținem $a=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(e)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&e&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(e))=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&e&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=e+0+0-0-0-0=e$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1&0&2\ln a\\0&a^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(a)\cdot A(a))=a^2$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0&\ln a^2\\0&a^2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=a^2=\det(A(a)\cdot A(a))$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$A(a)+A(b)=\begin{pmatrix}2 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & a+b & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & ab & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & a+b & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\ln(ab)\\ 0 & 2ab & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow ab=1$ și $a+b=2$, de unde obținem $a=1$ și $b=1$	**2p**
2.a)	$\sqrt{2}\circ 1=3\cdot\sqrt{2}\cdot 1-3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)+6+\sqrt{2}=$	**2p**
	$=3\sqrt{2}-6-3\sqrt{2}+6+\sqrt{2}=\sqrt{2}$	**3p**
b)	$x\circ y=3xy-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+6+\sqrt{2}=$	**2p**
	$=3x\left(y-\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\circ y=\sqrt{2}$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\left(\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\circ\sqrt{2}\right)\circ\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\sqrt{2}\circ\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}\right)=\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(2^x+3^x-4\right)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$ și $f(1)=1$, deci $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$x\in(-\infty,1)\Rightarrow f(x)=2^x+3^x-4$, deci $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3$	**3p**
	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-\infty,1)$, deci funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$	**2p**
c)	f este crescătoare pe $(-\infty,1)$ și continuă în $x=1$, deci $f(x)\leq f(1)$ și, cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in(-\infty,1)$	**2p**
	$x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)=\frac{x-2}{x^3}$, deci $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,2)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$ și, cum f este continuă, $f(1)=1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, obținem $f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x+1)(x+3)f(x)dx=\int_0^1(2x+4)dx=\left(x^2+4x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+4-0=5$	**2p**
b)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx=\ln\left(x^2+4x+3\right)\Big\vert_0^2=$	**2p**
	$=\ln 15-\ln 3=\ln 5$	**3p**
c)	$F'(x)=f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$, deci $F''(x)=\frac{-2\left(x^2+4x+5\right)}{\left(x^2+4x+3\right)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci orice primitivă F a funcției f este concavă	**2p**