Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Comparaţi numerele $\log_2 16$ şi $\sqrt[3]{125}$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(a+2)x+2a+1$, unde a este număr real. Determinaţi numerele reale a pentru care graficul funcţiei f este tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-x-2}=5^{3x-5}$.

5p **4.** Demonstraţi că numerele C_4^1, A_4^2 şi A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,a)$ şi $C(4,2a+1)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare.

5p **6.** Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului MNP, ştiind că $MN=16$ şi $m(\sphericalangle P)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 1 & -1 & -a\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+ay-z=a\\ x-y-az=-1\\ ax-y+z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=-4$.

5p **b)** Determinaţi mulţumea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătaţi că sistemul de ecuaţii **nu** admite nicio soluţie (x_0,y_0,z_0) pentru care $x_0=y_0=z_0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+8}$.

5p **a)** Arătaţi că $2020*(-2020)=2$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **c)** Ştiind că $(\mathbb{R},*)$ este grup, demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-2+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+4}$.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\,f(x))=2$.

5p **b)** Demonstraţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-2,+\infty)$.

5p **c)** Determinaţi $x\in[-1,+\infty)$ pentru care $f(x)\in\mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)}\,dx=e^2-1$.

5p **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Se consideră numerele reale pozitive a, b și c. Demonstrați că, dacă $1-\int_0^a \frac{f(x)}{x+1}dx$, $1-\int_0^b \frac{f(x)}{x+1}dx$ și $1-\int_0^c \frac{f(x)}{x+1}dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 16=\log_2 2^4=4$	**2p**
	Cum $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$, obținem că $\log_2 16<\sqrt[3]{125}$	**3p**
2.	$\Delta=(a+2)^2-4(2a+1)=a^2-4a$, unde a este număr real	**2p**
	Graficul funcției f este tangent axei $Ox \Leftrightarrow \Delta=0$, deci $a=0$ sau $a=4$	**3p**
3.	$x^2-x-2=3x-5 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=3$	**2p**
4.	$C_4^1=4$, $A_4^2=12$ și $A_5^2=20$	**3p**
	$12=\dfrac{4+20}{2}$, deci C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**
5.	$m_{AB}=\dfrac{a-1}{2}$, $m_{BC}=\dfrac{a+1}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	A, B și C sunt coliniare $\Rightarrow m_{AB}=m_{BC} \Rightarrow 3a-3=2a+2$, deci $a=5$	**3p**
6.	$\sin P=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$2R=\dfrac{MN}{\sin P} \Rightarrow R=16$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-1+1+(-1)-1-1-1=-4$	**3p**
b)	$\det(A(a))=-a(a^2+3)$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}^*$	**3p**
c)	Dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție și $x_0=y_0=z_0$, atunci $\begin{cases}x_0+ax_0-x_0=a\\x_0-x_0-ax_0=-1\\ax_0-x_0+x_0=-1\end{cases}$, unde a este număr real	**2p**
	Obținem $ax_0=1$ și $ax_0=-1$, ceea ce este imposibil	**3p**
2.a)	$2020*(-2020)=\sqrt[3]{2020^3+(-2020)^3+8}=\sqrt[3]{2020^3-2020^3+8}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{8}=2$	**2p**
b)	$x*e=x$, pentru orice număr real x, deci $\sqrt[3]{x^3+e^3+8}=x \Leftrightarrow x^3+e^3+8=x^3 \Leftrightarrow e=-2$	**3p**
	Cum $(-2)*x=\sqrt[3]{(-2)^3+x^3+8}=\sqrt[3]{x^3}=x$, pentru orice număr real x, obținem că $e=-2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**

c)	$f(x*y)=(x*y)^3+8=\left(\sqrt[3]{x^3+y^3+8}\right)^3+8=x^3+y^3+8+8=$	**2p**
	$=x^3+8+y^3+8=f(x)+f(y)$, pentru orice numere reale x și y, deci f este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x+4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{1+\frac{4}{x}}\right)=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+4)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**3p**
	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $(-2,+\infty)$	**2p**
c)	f este continuă, f este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$, $f(-1)=\frac{4}{3}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $f(x)\in\left(0,\frac{4}{3}\right]$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\in\mathbb{Z}$, deci $f(x)=1\Leftrightarrow x^2+4x+2=0$ și, cum $x\in[-1,+\infty)$, obținem $x=-2+\sqrt{2}$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\frac{x+1}{f(x)}dx=\int_0^2 e^x dx=e^x\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=e^2-e^0=e^2-1$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx=\int_0^1(x+1)^2e^x\,dx=\left(x^2+1\right)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e-e^0=2e-1$	**2p**
c)	$\frac{f(x)}{x+1}=e^{-x}$, $x\in(0,+\infty)\Rightarrow 1-\int_0^a\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-a}$, $1-\int_0^b\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-b}$, $1-\int_0^c\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-c}$	**3p**
	e^{-a}, e^{-b} și e^{-c} sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow\left(e^{-b}\right)^2=e^{-a}\cdot e^{-c}$, deci $e^{-2b}=e^{-a-c}$, de unde obținem $2b=a+c$, adică a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**