Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{5}\left(1+2\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}=10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. Arătați că $f(1)=f(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2-21\right)=\log_5 4$.

5p **4.** După o scumpire cu 10%, un obiect costă 220 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,8)$ și $B(0,4)$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB, determinați coordonatele punctului M.

5p **6**. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=60^\circ$. Calculați cosinusul unghiului A.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $B\cdot A+B=O_2$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $\det\left(B+nA\right)=\det B+n\det A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+2y+1$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ(-1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+\ln\left(x^2+1\right)<\frac{5}{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=e^2-1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=1-\ln 2$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=e\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{5}\left(1+2\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}=\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}=$	**3p**
	$=2\cdot 5=10$	**2p**
2.	$f(1)=1^2-3\cdot 1+1=-1$	**2p**
	$f(2)=2^2-3\cdot 2+1=-1$, deci $f(1)=f(2)$	**3p**
3.	$x^2-21=4\Rightarrow x^2-25=0$	**3p**
	$x=-5$ sau $x=5$, care convin	**2p**
4.	$x+\frac{10}{100}\cdot x=220$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=2$	**3p**
	$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=6$	**2p**
6.	$m(\sphericalangle A)=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$	**3p**
	$\cos A=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & -4\end{vmatrix}=1\cdot(-4)-(-1)\cdot 6=$	**3p**
	$=-4+6=2$	**2p**
b)	$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot A=-B$, deci $B\cdot A+B=O_2$	**2p**
c)	$B+nA=\begin{pmatrix}1+n & 2+6n\\ 2-n & 4-4n\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B+nA)=\begin{vmatrix}1+n & 2+6n\\ 2-n & 4-4n\end{vmatrix}=2n^2-10n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Cum $\det B=0$, obținem $2n^2-10n=2n$, deci $n=0$ sau $n=6$, care convin	**3p**
2.a)	$1\circ(-1)=1+2(-1)+1=$	**3p**
	$=1-2+1=0$	**2p**
b)	$x\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=x+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=$	**3p**
	$=x+(-1)+1=x$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	Presupunem că legea de compoziție „$\circ$” admite elementul neutru $e \Rightarrow 0 \circ e = e \circ 0 = 0$	**3p**
	$0 \circ e = 0 \Leftrightarrow 2e+1=0 \Leftrightarrow e=-\frac{1}{2}$, $e \circ 0 = 0 \Leftrightarrow e+1=0 \Leftrightarrow e=-1$, contradicție, deci legea de compoziție „$\circ$” nu admite element neutru	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x\left(x^2+1-x^2-2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	Dacă $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\ln\left(x^2+1\right)$, atunci $g'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci g este crescătoare pe $[0,1]\Rightarrow g(x)\leq g(1)$, pentru orice $x\in[0,1]$	**3p**
	Cum $g(1)=\frac{3}{2}+\ln 2<\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$, obținem $g(x)<\frac{5}{2}$, deci $f(x)+\ln\left(x^2+1\right)<\frac{5}{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^2 (x+1)f(x)\,dx=\int\limits_0^2 (x+1)\cdot\frac{e^x}{x+1}\,dx=\int\limits_0^2 e^x dx=e^x\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=e^2-e^0=e^2-1$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln\left\|f(x)\right\|\Big\|_0^1=\ln\frac{e^x}{x+1}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\ln\frac{e}{2}=1-\ln 2$	**2p**
c)	$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{x+1}\,dx+\int\limits_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=\int\limits_0^1 e^x\left(\ln(x+1)\right)'dx+\int\limits_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=$	**3p**
	$=e^x\ln(x+1)\Big\|_0^1-\int\limits_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx+\int\limits_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=e\ln 2$	**2p**