Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{3}=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+2$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=3$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, un obiect costă 180 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$, $B(-4,1)$ și $C(0,4)$. Determinaţi lungimea înălțimii din vârful C în triunghiul ABC.

5p **6**. Arătați că $\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ-\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $3A-A\cdot A=2I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $\left(xA-I_2\right)\left(xA-I_2\right)=5A-I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2+(x+1)(y+1)+y^2$.

5p **a)** Arătați că $3\circ(-1)=10$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ 1\geq 2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=-\frac{1}{6}$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=0$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\ln\frac{5}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=$	**3p**
	$=2\cdot 3=6$	**2p**
2.	$a^2-4a+2=2\Leftrightarrow a^2-4a=0$	**3p**
	$a=0$ sau $a=4$	**2p**
3.	$x-1=9$	**3p**
	$x=10$, care convine	**2p**
4.	$x-\frac{10}{100}\cdot x=180$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$AB=BC\Rightarrow CD$ este înălțime în ΔABC, unde $D(0,1)$ este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CD=3$	**2p**
6.	$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\sqrt{3}\cdot\sin 60°-\sqrt{2}\cdot\cos 45°=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-3\cdot 0=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**2p**
	$3A-A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 0 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2I_2$	**3p**
c)	$xA-I_2=\begin{pmatrix}x-1 & 3x\\ 0 & 2x-1\end{pmatrix}$, $\left(xA-I_2\right)\left(xA-I_2\right)=\begin{pmatrix}(x-1)^2 & 9x^2-6x\\ 0 & (2x-1)^2\end{pmatrix}$, $5A-I_2=\begin{pmatrix}4 & 15\\ 0 & 9\end{pmatrix}$	**3p**
	Cum $(x-1)^2=4$, $9x^2-6x=15$ și $(2x-1)^2=9$, obținem $x=-1$	**2p**
2.a)	$3\circ(-1)=3^2+(3+1)(-1+1)+(-1)^2=$	**3p**
	$=9+4\cdot 0+1=10$	**2p**
b)	$x\circ y=x^2+(x+1)(y+1)+y^2=$	**2p**
	$=y^2+(y+1)(x+1)+x^2=y\circ x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**3p**

c)	$x \circ 1 = x^2 + 2(x+1) + 1^2 = x^2 + 2x + 1 + 2 =$	**3p**
	$= (x+1)^2 + 2 \geq 2$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (x-1)'\ln x + (x-1)(\ln x)' =$	**3p**
	$= \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in (0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1) = 0$, $f'(1) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = 0$	**3p**
c)	$x \in (0,1] \Rightarrow \ln x \leq 0$ și $1 - \frac{1}{x} \leq 0$	**3p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice număr real $x \in (0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+1) f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+1+x-2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{6}$	**2p**
b)	$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(1 + \frac{t}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt = \left(t + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\operatorname{arctg} t\right)\Big\|_0^x =$	**3p**
	$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
c)	$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x}{x^2+1}$, pentru orice număr real x, $x \neq 0$	**2p**
	$\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)\Big\|_1^2 = \ln\frac{5}{2}$	**3p**