Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $2,5:0,5-5\left(6,5-\frac{11}{2}\right)=0$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+mx+1=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1+x_2+2x_1x_2=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1+\sqrt{x-2}=3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,6)$, $B(4,6)$ și $C(-4,0)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați $\cos A$, știind că A este unghi ascuțit astfel încât $\sin A=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A+I_2)=5$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A=4A$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $A\cdot X=X\cdot A$.

2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy+x+y-1}{2}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x*x\le 1$.

5p **c)** Calculați $(-1)*0*1*\ldots*2020$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\frac{2}{3}\le-\frac{5}{18}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2020}-2020x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+2020x-1\right)dx=\frac{1}{2021}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $[1,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\int_0^1\left(f(-x)-f(x)\right)e^x dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2{,}5:0{,}5-5\left(6{,}5-\frac{11}{2}\right)=25:5-5(6{,}5-5{,}5)=$	**3p**
	$=5-5\cdot 1=0$	**2p**
2.	$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=1$	**2p**
	$-m+2\cdot 1=1$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\sqrt{x-2}=3-1\Rightarrow x-2=4$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele divizibile cu 10 sunt: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 și 90, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$AB=8$, $AC=6$, $BC=10$	**2p**
	$P_{ABC}=6+8+10=24$	**3p**
6.	Unghiul A este ascuțit $\Rightarrow \cos A>0$ și, cum $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, obținem $\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A+I_2=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_2)=\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot 4-3\cdot 1=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}=4A$	**2p**
c)	$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci $AX=\begin{pmatrix}x+z&y+t\\3x+3z&3y+3t\end{pmatrix}$ și $XA=\begin{pmatrix}x+3y&x+3y\\z+3t&z+3t\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}x+z&y+t\\3x+3z&3y+3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y&x+3y\\z+3t&z+3t\end{pmatrix}\Leftrightarrow z=3y$ și $x+2y=t\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x&y\\3y&x+2y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale, deci există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$	**2p**

2.a)	$1*2=\frac{1\cdot 2+1+2-1}{2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**
b)	$\frac{x^2+2x-1}{2}\le 1 \Leftrightarrow x^2+2x-3\le 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)\le 0$	**3p**
	$x\in[-3,1]$	**2p**
c)	$(-1)*x=-1$, unde x este număr real	**2p**
	$(-1)*0*1*\ldots*2020=(-1)*(0*1*\ldots*2020)=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge f(1)$ și, cum $f(1)=1$, obținem $x^2-2\ln x\ge 1$	**2p**
	$\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\ln\frac{2}{3}\ge 1$, deci $2\ln\frac{2}{3}\le\frac{4}{9}-1$, de unde obținem $\ln\frac{2}{3}\le-\frac{5}{18}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x)+2020x-1)dx=\int_0^1 x^{2020}dx=\frac{x^{2021}}{2021}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1^{2021}-0^{2021}}{2021}=\frac{1}{2021}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a funcției f, deci $F'(x)=f(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=2020x^{2019}-2020=2020(x^{2019}-1)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci orice primitivă F a funcției f este convexă pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	$\int_0^1 (f(-x)-f(x))e^x dx=\int_0^1 4040xe^x dx=4040\int_0^1 xe^x dx=4040xe^x\Big\|_0^1-4040\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=4040e-4040e^x\Big\|_0^1=4040e-4040e+4040=4040$	**2p**