Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătaţi că $\frac{1}{2}:0,5-\frac{1}{4}:0,25=0$.
5p	**2.** Calculaţi $f(-1)\cdot f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x-2}=5$.
5p	**4.** Un obiect costă 1000 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 20%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(6,3)$. Calculaţi distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB.
5p	**6**. Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=4$ și $B=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ și $B(x,y)=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & -1\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătaţi că $\det A=-4$.
5p	**b)** Arătaţi că $\det\left(A-2B(x,y)\right)=0$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale x și y pentru care $A\cdot B(x,y)=B(x,y)\cdot A$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+2(x+y)+2$.
5p	**a)** Arătaţi că $2020\circ(-2)=-2$.
5p	**b)** Demonstrați că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+(x-1)^2$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=3x^2+2x-2$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\,f'(x)}{f(x)}=3$.
5p	**c)** Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta $y=3x+1$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3+2x+2$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x-2\right)dx=0$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int\limits_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3-3x-1\right)dx=-2$.
5p	**c)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}:0,5-\frac{1}{4}:0,25=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}-\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**3p**
	$f(-1)\cdot f(1)=0$	**2p**
3.	$3x-2=25$	**3p**
	$x=9$, care convine	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 1000=200$	**3p**
	Preţul după scumpire este $1000+200=1200$ de lei	**2p**
5.	$M(4,3)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$OM=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A și $B=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel	**3p**
	$AB=AC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(-2)-1\cdot 2=$	**3p**
	$=-2-2=-4$	**2p**
b)	$A-2B(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x & 2\\ 2y & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\det(A-2B(x,y))=\begin{vmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A\cdot B(x,y)=\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}$, $B(x,y)\cdot A=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$, de unde obţinem $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	$2020\circ(-2)=2020\cdot(-2)+2(2020+(-2))+2=$	**3p**
	$=2020\cdot(-2)+2\cdot 2020+2\cdot(-2)+2=-4+2=-2$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+2x+2y+4-2=$	**3p**
	$=x(y+2)+2(y+2)-2=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$\left(\frac{1}{x}+2\right)(x+2)-2=x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+2\right)(x+2)=x+2 \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+1\right)=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2+2(x-1)(x-1)'=$	**2p**
	$=3x^2+2(x-1)=3x^2+2x-2$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x^2+2x-2\right)}{x^3+(x-1)^2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2-2x}{x^3+x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$	**3p**
c)	Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=a$, situat pe graficul funcţiei f are panta egală cu $f'(a)$, deci este paralelă cu dreapta $y=3x+1 \Leftrightarrow f'(a)=3$	**2p**
	$3a^2+2a-5=0 \Leftrightarrow a=-\frac{5}{3}$ sau $a=1$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x-2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^5+x^3+2x+2-x^3-2x-2\right)dx=\int_{-1}^{1}x^5\,dx=\left.\frac{x^6}{6}\right\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3-3x-1\right)dx=\int_{0}^{2}e^x(-x+1)dx=\left.e^x(-x+1)\right\|_{0}^{2}-\int_{0}^{2}(-1)e^x dx=$	**3p**
	$=-e^2-1+e^2-1=-2$	**2p**
c)	F este primitivă a funcţiei $f \Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=5x^4+3x^2+2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci F este convexă	**3p**