

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 2**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\sqrt{11}(\sqrt{11}+1) - (\sqrt{11}+3) = 8$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ . Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției  $f$  cu axa  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 + 2} = 3\sqrt{3}$ .
- 5p** 4. Se consideră patru puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare. Calculați numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $M(-1, 2)$  și  $N(2, 1)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $M$  față de punctul  $N$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , cu  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 9$  și  $AC = 3\sqrt{5}$ . Calculați măsura unghiului  $B$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1-10a & 8a \\ -5a & 1+4a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -5$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $A(a) \cdot A(b) = A(a+b-6ab)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p** c) Determinați numerele naturale  $m$  și  $n$ , pentru care  $A(m) \cdot A(n) = A(6-5mn)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ .
- 5p** a) Arătați că  $1 * 3 = 3$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $x * y = (x-3)(y-3) + 3$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați numerele numere reale  $x$  pentru care  $x * x * x = x$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 - 5x + 2020$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 5(x-1)(x+1)(x^2+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este concavă pe  $(-\infty, 0]$ .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația  $f(x) = 2025$  nu admite nicio soluție în intervalul  $[-1, 1]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ .
- 5p** a) Arătați că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este crescătoare pe  $[0, \pi]$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x) dx$ .
- 5p** c) Arătați că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = 1$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică M\_tehnologic**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 2

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{11}(\sqrt{11}+1) - (\sqrt{11}+3) = \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} + \sqrt{11} - \sqrt{11} - 3 =$ $= 11 - 3 = 8$	2p 3p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f$ cu axa $Ox$ sunt $x = 2$ și $x = 3$	2p 3p
3.	$x^2 + 2 = 27 \Rightarrow x^2 - 25 = 0$ $x = -5$ sau $x = 5$ , care convin	2p 3p
4.	Numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte este egal cu $C_4^2 =$ $= \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$	2p 3p
5.	$N$ este mijlocul segmentului $MP$ , unde $P(a, b)$ este simetricul punctului $M$ față de punctul $N$ , deci $2 = \frac{-1+a}{2}$ și $1 = \frac{2+b}{2}$ $a = 5$ și $b = 0$	3p 2p
6.	$\cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot AB} =$ $= \frac{81 + 18 - 45}{2 \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , de unde obținem că măsura unghiului $B$ este de $45^\circ$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} -9 & 8 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = (-9) \cdot 5 - (-5) \cdot 8 =$ $= -45 + 40 = -5$	3p 2p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1-10b-10a+100ab-40ab & 8b-80ab+8a+32ab \\ -5a+50ab-5b-20ab & -40ab+1+4a+4b+16ab \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1-10(a+b-6ab) & 8(a+b-6ab) \\ -5(a+b-6ab) & 1+4(a+b-6ab) \end{pmatrix} = A(a+b-6ab)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	3p 2p
c)	$A(m+n-6mn) = A(6-5mn)$ , deci $mn - m - n + 6 = 0$ $(m-1)(n-1) = -5$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem $m = 0$ , $n = 6$ sau $m = 6$ , $n = 0$	2p 3p
2.a)	$1 * 3 = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 12 =$ $= 3 - 3 - 9 + 12 = 3$	3p 2p
b)	$x * y = xy - 3x - 3y + 9 + 3 =$ $= x(y-3) - 3(y-3) + 3 = (x-3)(y-3) + 3$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p

<b>c)</b>	$x * x = (x-3)^2 + 3, x * x * x = (x-3)^3 + 3$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$(x-3)^3 + 3 = x$ , deci $x = 2, x = 3$ sau $x = 4$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) =$	<b>3p</b>
	$= 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 5(x-1)(x+1)(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$f''(x) = 20x^3, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
	$f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0]$ , deci funcția $f$ este concavă pe $(-\infty, 0]$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1, 1] \Rightarrow f(x) \leq f(-1)$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$	<b>2p</b>
	$f(-1) = 2024$ , deci $f(x) \leq 2024$ pentru orice $x \in [-1, 1]$ , deci ecuația $f(x) = 2025$ <b>nu</b> admite nicio soluție în intervalul $[-1, 1]$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$F'(x) = f(x) = \sin x$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b>
	Cum $\sin x \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, \pi]$ , obținem $F'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, \pi]$ , deci orice primitivă $F$ a funcției $f$ este crescătoare pe $[0, \pi]$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin x \cos x dx = \sin^2 x \Big _{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$	<b>3p</b>
	$= \sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)' dx = -x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$	<b>2p</b>
	$= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$	<b>3p</b>