Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 20

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right):15=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5$. Arătați că $f(x)-f(-x)=0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x-3}=\sqrt{2x+1}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-3x+2=0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ şi $B(3,0)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6**. Calculați aria rombului $ABCD$, știind că $AC=6$ și $BD=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=A-xI_2$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că $\det(B(x))\geq 1$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziţie $x*y=xy+x+y+4$.

5p **a)** Arătați că $2020*(-1)=3$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x+1)(y+1)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^4-4x^2-3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=8x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $-5\leq f(x)\leq -3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4\left(f(x)+\sqrt{x}\right)dx=21$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2020$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+\sqrt{x}\right)e^x dx=e(2e-1)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 20

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right):15=\frac{4-1}{2}\cdot\frac{9-1}{3}\cdot\frac{16-1}{4}:15=$	**3p**
	$=15:15=1$	**2p**
2.	$f(x)-f(-x)=x^2+5-\left((-x)^2+5\right)=$	**3p**
	$=x^2+5-x^2-5=0$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$4x-3=2x+1\Rightarrow 2x=4$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Soluțiile ecuației $x^2-3x+2=0$ sunt 1 și 2, care aparțin mulțimii A, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$m_{AB}=\frac{0-3}{3-0}=-1$	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta AB este $y=-x$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{6\cdot 4}{2}=$	**3p**
	$=12$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(0))=\begin{vmatrix}3&-2\\5&-3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=$	**3p**
	$=-9+10=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}-1+1&0\\0&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$B(x)=A-xI_2=\begin{pmatrix}3-x&-2\\5&-3-x\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(x))=\begin{vmatrix}3-x&-2\\5&-3-x\end{vmatrix}=-9+x^2+10=$	**3p**
	$=x^2+1\geq 1$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$2020*(-1)=2020\cdot(-1)+2020+(-1)+4=$	**3p**
	$=-1+4=3$	**2p**
b)	$x*y=xy+x+y+1+3=$	**3p**
	$=x(y+1)+(y+1)+3=(x+1)(y+1)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$(m+1)(n+1)+3=2$	**2p**
	$(m+1)(n+1)=-1$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem $(-2,0)$ și $(0,-2)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=8x^3-8x=$	**3p**
	$=8x(x^2-1)=8x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=-5$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-5$	**3p**
c)	$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$, $x\in[-1,0]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,0]$ și $x\in[0,1]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,1]$	**3p**
	Cum $f(-1)=f(1)=-5$ și $f(0)=-3\Rightarrow -5\leq f(x)\leq -3$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^4\left(f(x)+\sqrt{x}\right)dx=\int_1^4 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^4=$	**3p**
	$=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2020\right)'=\frac{3x^2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=x^2-\sqrt{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_1^2\left(f(x)+\sqrt{x}\right)e^xdx=\int_1^2 x^2e^xdx=\left.x^2e^x\right\|_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=4e^2-e-2\left(\left.xe^x\right\|_1^2-\int_1^2 e^xdx\right)=$	**3p**
	$=4e^2-e-2(2e^2-e)+\left.2e^x\right\|_1^2=2e^2-e=e(2e-1)$	**2p**