Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=2$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-4x+m=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2=2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+1}=3x+1$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 25%, preţul unui obiect este 750 de lei. Determinați preţul obiectului înainte de ieftinire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$ şi $B(8,6)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $OABC$ este paralelogram.
5p	**6**. Arătaţi că $\sqrt{3}\cos 30°+\sin 30°+\frac{1}{2}\cos 90°=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(M(1))=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=2abM(0)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $X\cdot M(1)=M(0)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+4x+4y+3$.
5p	**a)** Arătaţi că $1*(-1)=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $x*y=4(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinaţi numărul real x pentru care $x*\frac{1}{4}*(-x)=19$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este convexă.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+1)(f(x)-x^2)dx=1$.
5p	**b)** Calculaţi $\int_{-1}^1 x f(x)dx$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural n, ştiind că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{n^2}{3}+\frac{\pi}{4}-1$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=\frac{12}{6}=2$	**3p**
	$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=2^2-2=2$	**2p**
2.	$x_1+x_2=4$, $x_1x_2=m\Rightarrow x_1^2+x_2^2=16-2m$	**3p**
	$16-2m=2\Leftrightarrow m=7$	**2p**
3.	$3x+1=(3x+1)^2\Rightarrow 3x(3x+1)=0$	**2p**
	$x=-\frac{1}{3}$ sau $x=0$, care convin	**3p**
4.	$x-\frac{25}{100}\cdot x=750$, unde x este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=1000$ de lei	**2p**
5.	$OABC$ este paralelogram, deci segmentele OB și AC au același mijloc	**2p**
	Punctul $M(4,3)$ este mijlocul segmentului OB, deci $x_C=8$ și $y_C=4$	**3p**
6.	$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 90°=0$	**3p**
	$\sqrt{3}\cos 30°+\sin 30°+\frac{1}{2}\cos 90°=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=I_2+A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(1))=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1-2=-1$	**2p**
b)	$M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=(I_2+aA)(I_2+bA)-(I_2+(a+b)A)=abA\cdot A$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	Cum $A\cdot A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$ și $M(0)=I_2$, obținem $M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=2abM(0)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det M(1)\neq 0$, $(M(1))^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=M(0)\cdot(M(1))^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$1*(-1)=4\cdot 1\cdot(-1)+4\cdot 1+4\cdot(-1)+3=$	**3p**
	$=-4+4-4+3=-1$	**2p**

b)	$x*y=4xy+4x+4y+4-1=$	**2p**
	$=4x(y+1)+4(y+1)-1=4(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x*\frac{1}{4}=5x+4$, $(5x+4)*(-x)=20\left(1-x^2\right)-1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$20\left(1-x^2\right)=20$, de unde obținem $x=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x+4)(x+1)-\left(x^2+4x+4\right)}{(x+1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+4}{x(x+1)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{x+1}=3$, deci dreapta de ecuație $y=x+3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci funcția f este convexă	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+1\right)\left(f(x)-x^2\right)dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^1 dx=$	**2p**
	$=x\Big\vert_0^1=1-0=1$	**3p**
b)	$\int_{-1}^1 x f(x)dx=\int_{-1}^1\left(x^3+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)\Big\vert_{-1}^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=0$	**2p**
c)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\text{arctg}x\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}$	**3p**
	$\frac{n^2}{3}+\frac{\pi}{4}-1=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow n^2=4$ și, cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**