

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați primul termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_3 = 12$ și rația $q = 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) \geq f(1)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+1) = \log_5(11-x)$.
- 5p 4. Calculați $C_{11}^9 - C_{11}^2$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,4)$, $B(1,0)$ și $C(5,4)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.
- 5p 6. Arătați că $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $A \cdot A \cdot A = A$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot X = I_2 + 3A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.
- 5p a) Arătați că $2 * 2020 = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele naturale m și n pentru care $m * n = 13$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-1)e^x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 2xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$.
- 5p c) Demonstrați că $xe^x \geq e^x - 1$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x) dx = 6$.
- 5p b) Calculați $\int_{-2}^0 f(x) dx$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_{-3}^a f'(x)f''(x) dx = 2 \left(\frac{1}{(a+4)^4} - 1 \right)$, pentru orice $a \in (-3, +\infty)$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_3 = b_1 q^2 \Rightarrow b_1 = \frac{b_3}{q^2} =$	3p
	$= \frac{12}{2^2} = 3$	2p
2.	$2x + 1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$	3p
	$x \in [1, +\infty)$	2p
3.	$x + 1 = 11 - x \Rightarrow 2x = 10$	3p
	$x = 5$, care convine	2p
4.	$C_{11}^9 = C_{11}^{11-9} = C_{11}^2$	3p
	$C_{11}^9 - C_{11}^2 = C_{11}^2 - C_{11}^2 = 0$	2p
5.	$AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $AC = 8$	3p
	$AC^2 = AB^2 + BC^2$ și, cum $AB = BC$, obținem că $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel	2p
6.	$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ$	2p
	$\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) =$	3p
	$= -9 + 8 = -1$	2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p
	$A \cdot A \cdot A = A \cdot (A \cdot A) = A \cdot I_2 = A$	2p
c)	Matricea A este inversabilă și, cum $A \cdot A = I_2$, obținem că inversa matricei A este matricea A	2p
	$X = A^{-1} \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A + 3A \cdot A \Leftrightarrow X = A + 3I_2$, deci $X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	3p
2.a)	$2 * 2020 = 2 \cdot 2020 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2020 + 6 =$	3p
	$= -4 + 6 = 2$	2p
b)	$x * y = xy - 2x - 2y + 4 + 2 =$	3p
	$= x(y - 2) - 2(y - 2) + 2 = (x - 2)(y - 2) + 2$, pentru orice numere reale x și y	2p
c)	$(m - 2)(n - 2) + 2 = 13 \Leftrightarrow (m - 2)(n - 2) = 11$	2p
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m = 3$, $n = 13$ sau $m = 13$, $n = 3$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x =$ $= e^x(2 + 2x - 2) = 2xe^x, \quad x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2e^x) =$ $= 2e^0 = 2$	3p 2p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ Pentru orice număr real x , $f(x) \geq f(0)$, deci $f(x) \geq -2$, de unde obținem $xe^x - e^x \geq -1$, deci $xe^x \geq e^x - 1$, pentru orice număr real x	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (x+4)f(x) dx = \int_0^2 (x+2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big _0^2 =$ $= \frac{4}{2} + 4 = 6$	3p 2p
b)	$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 \frac{x+2}{x+4} dx = \int_{-2}^0 \frac{x+4-2}{x+4} dx = \int_{-2}^0 \left(1 - \frac{2}{x+4} \right) dx = (x - 2 \ln(x+4)) \Big _{-2}^0 =$ $= 0 - 2 \ln 4 - (-2) + 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_{-3}^a f'(x) \cdot f''(x) dx = \frac{1}{2} (f'(x))^2 \Big _{-3}^a = \frac{1}{2} (f'(a))^2 - \frac{1}{2} (f'(-3))^2$, pentru orice $a \in (-3, +\infty)$ $f'(x) = \frac{2}{(x+4)^2}$, deci $\int_{-3}^a f'(x) f''(x) dx = 2 \left(\frac{1}{(a+4)^4} - 1 \right)$, pentru orice $a \in (-3, +\infty)$	3p 2p