

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) - \left(2 - \frac{4}{3}\right) = 0$.
- 5p 2. Determinați numărul real m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 3$ conține punctul $A(2, 5)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+4} - 2 = x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 1)$ și $B(2, -2)$. Determinați numărul real a , știind că punctele A , B și $C(4, a)$ sunt coliniare.
- 5p 6. Diagonala pătratului $MNPQ$ are lungimea de $6\sqrt{2}$. Calculați perimetrul acestui pătrat.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det(A - B) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că matricea $C = A \cdot A + B \cdot B$ nu este inversabilă.
- 5p c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A \cdot X = X \cdot B$, unde $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy + 1}{x + y}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 1 = 1$.
- 5p b) Determinați numărul $x \in M$ pentru care $x * 2 = \frac{3}{2}$.
- 5p c) Calculați $\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8 * \lg 10$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^{2020} + 1, & x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că funcția f este continuă în $x_0 = 1$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(1, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$ și $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 x f(x) dx = e(e-1)$.

5p b) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x} dx$.

5p c) Demonstrați că $\int_1^e (f(x) + g(x)) dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) - \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2+3}{3} - \frac{6-4}{3} =$	2p
	$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$	3p
2.	$f(2) = 5 \Leftrightarrow 2^2 - 2m + 3 = 5$	3p
	$2m = 2$, deci $m = 1$	2p
3.	$x + 4 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = 0$	2p
	$x = -3$, care nu convine sau $x = 0$, care convine	3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care au cifrele egale, deci sunt 9 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	1p
5.	$m_{AB} = -1$	2p
	$m_{AC} = \frac{a-1}{5}$, deci punctele A , B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB} = m_{AC} \Leftrightarrow a = -4$	3p
6.	$MN = 6$	2p
	$P_{MNPQ} = 4MN = 24$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 =$	3p
	$= 0 - (-1) = 1$	2p
b)	$C = A \cdot A + B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	3p
	$\det C = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, deci matricea C nu este inversabilă	2p
c)	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1+x & 2+y \\ x & y \end{pmatrix}$, $X \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & y \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	2p
	$\begin{pmatrix} 1+x & 2+y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & y \end{pmatrix}$, deci $x = 2$ și $y = 0$, care convin	3p

2.a)	$1 * 1 = \frac{1 \cdot 1 + 1}{1 + 1} =$	3p
	$= \frac{2}{2} = 1$	2p
b)	$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x+2 = 3x+6$	3p
	$x = 4$, care convine	2p
c)	$x * 1 = 1$, unde $x \in M$	2p
	$\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8 * \lg 10 = (\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8) * \lg 10 = (\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8) * 1 = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^{2020} + 1) = 2$	2p
	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x} = 2$ și, cum $f(1) = 2$, obținem $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, deci funcția f este continuă în $x_0 = 1$	3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	Pentru $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, deci $f''(x) = \frac{2}{x^3}$	3p
	$f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deci funcția f' este crescătoare pe $(1, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big _1^2 =$	3p
	$= e^2 - e = e(e-1)$	2p
b)	$\int_e^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big _e^{e^2} =$	3p
	$= \frac{1}{2} (2^2 - 1^2) = \frac{3}{2}$	2p
c)	$\int_1^e (f(x) + g(x)) dx = \int_1^e \frac{e^x}{x} dx + \int_1^e e^x \ln x dx = \int_1^e \frac{e^x}{x} dx + e^x \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{1}{x} e^x dx =$	3p
	$= e^e \ln e - e^1 \ln 1 = e^e$	2p