

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Test 20

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x+1) - f(x) \leq 7$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^3 - 8) = \frac{1}{\log_{19} 2}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 12.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5,5)$, $B(5,5)$ și C . Arătați că, dacă $AC = BC$, atunci punctul C este situat pe axa Oy .
- 5p 6. Calculați lungimea catetei AB a triunghiului ABC dreptunghic în A , știind că $BC = 8$ și $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y - 20$.

- 5p 1. Arătați că $20 * 1 = 1$.
- 5p 2. Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p 3. Verificați dacă $e = 20$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p 4. Determinați numărul real x , știind că $(2x - 1) * x = 21$.
- 5p 5. Determinați numărul real x pentru care $9^x * 3^x = -8$.
- 5p 6. Arătați că $x^2 * (2x + 21) \geq 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

- 5p 1. Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p 2. Determinați numărul real a , știind că $A(a) + A(a+1) = 2A(-1)$.
- 5p 3. Arătați că $A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(2020) = 2020 \cdot A\left(\frac{2021}{2}\right)$.
- 5p 4. Arătați că $\det(A(a) \cdot A(b)) - \det(A(a) + A(b)) \geq 0$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p 5. Demonstrați că $\det(A(x) \cdot A(y) - A(y) \cdot A(x)) \geq 0$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p 6. Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) + \det(A(a) \cdot A(a)) = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 20

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}^2 - 1^2} \cdot \frac{1}{2} =$ $= (\sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	3p 2p
2.	$f(x+1) - f(x) = (x+1)^2 + 2(x+1) - (x^2 + 2x) = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 - x^2 - 2x = 2x + 3$ $2x + 3 \leq 7 \Rightarrow x \leq 2, \text{ deci } x \in (-\infty, 2]$	2p 3p
3.	$\log_2(x^3 - 8) = \log_2 19 \Rightarrow x^3 - 8 = 19 \Leftrightarrow x^3 = 27$ $x = 3, \text{ care convine}$	3p 2p
4.	<p>Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile</p> <p>În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 și 96 sunt multipli de 12, deci sunt 8 cazuri favorabile</p> $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$	2p 2p 1p
5.	<p>$AC = BC$, deci punctul C se află pe mediatoarea segmentului AB</p> <p>Mediatoarea segmentului AB este axa Oy, deci $C \in Oy$</p>	3p 2p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{AB}{8}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{8} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	$20 * 1 = 20 + 1 - 20 =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p
2.	<p>$(x * y) * z = (x + y - 20) * z = x + y + z - 40$, pentru orice numere reale x, y și z</p> <p>$x * (y * z) = x * (y + z - 20) = x + y + z - 40 = (x * y) * z$, pentru orice numere reale x, y și z</p>	2p 3p
3.	<p>$x * 20 = x + 20 - 20 = x$, pentru orice număr real x</p> <p>$20 * x = 20 + x - 20 = x$, pentru orice număr real x, deci $e = 20$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”</p>	2p 3p
4.	$(2x - 1) + x - 20 = 21 \Leftrightarrow 3x = 42$ $x = 14$	3p 2p
5.	$9^x + 3^x - 20 = -8 \Leftrightarrow (3^x + 4)(3^x - 3) = 0$ <p>Cum $3^x > 0$, obținem $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$</p>	3p 2p

6.	$x^2 * (2x + 21) = x^2 + 2x + 21 - 20 = x^2 + 2x + 1 =$	2p
	$= (x + 1)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$	3p
2.	$A(a) + A(a+1) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ a+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a+1 \\ 2a+1 & 0 \end{pmatrix}$, $2A(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	3p
	Obținem $2a + 1 = -2$, deci $a = -\frac{3}{2}$	2p
3.	$A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(2020) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 2020 & 0 \end{pmatrix} =$	2p
	$= \begin{pmatrix} 2020 & 1+2+3+\dots+2020 \\ 1+2+3+\dots+2020 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2020 & \frac{2020 \cdot 2021}{2} \\ \frac{2020 \cdot 2021}{2} & 0 \end{pmatrix} = 2020 \cdot A\left(\frac{2021}{2}\right)$	3p
4.	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1+ab & b \\ a & ab \end{pmatrix}$, $A(a) + A(b) = \begin{pmatrix} 2 & a+b \\ a+b & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	2p
	$\det(A(a) \cdot A(b)) - \det(A(a) + A(b)) = a^2b^2 + (a+b)^2 \geq 0$, pentru orice numere reale a și b	3p
5.	$A(x) \cdot A(y) - A(y) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 0 & y-x \\ x-y & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	3p
	$\det(A(x) \cdot A(y) - A(y) \cdot A(x)) = \begin{vmatrix} 0 & y-x \\ x-y & 0 \end{vmatrix} = -(x-y)(y-x) = (x-y)^2 \geq 0$, pentru orice numere reale x și y	2p
6.	$\det(A(a)) = -a^2$, $\det(A^2(a)) = a^4$, pentru orice număr real a	2p
	$-a^2 + a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a = -1, a = 0$ sau $a = 1$	3p