

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  cu  $b_2 = 2$  și  $b_4 = 4$ . Determinați  $b_6$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care vârful parabolei asociate funcției  $f$  este situat pe dreapta  $y = 3x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ .
- 5p 4. Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.
- 5p 5. Segmentele  $AB$  și  $A'B'$  au același mijloc. Demonstrați că  $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \vec{0}$ .
- 5p 6. Demonstrați că, în orice triunghi  $ABC$ , are loc relația  $AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ , unde  $R$  este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$$
 și matricea  $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că  $\det(X(0,1)) = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte  $a$  și  $b$ , sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p c) Demonstrați că, dacă  $(x_0, y_0, z_0)$  este soluție a sistemului de ecuații, atunci  $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$ , pentru orice număr real  $a$ .
2. Pe mulțimea  $M = (2, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = (x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $5 * 10 = 17$ .
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p c) Determinați  $x \in M$  pentru care  $x * x * x = x * x$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ , este paralelă cu dreapta de ecuație  $x - \sqrt{3}y = 0$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  are un unic punct de extrem.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \right)$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 \left( 2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \frac{\pi}{4}$ .
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este strict crescătoare.

**5p** c) Arătați că, pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ , cu  $a < b$ ,  $\int_a^b f(x)F^2(x)dx > 0$ , pentru orice primitivă  $F$  a funcției  $f$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$b_4^2 = b_2 \cdot b_6 \Rightarrow 4^2 = 2b_6$ $b_6 = 8$	3p 2p
2.	$x_V = 1, y_V = m - 1$ , unde $V(x_V, y_V)$ este vârful parabolei asociate funcției $f$ $y_V = 3x_V \Leftrightarrow m - 1 = 3$ , deci $m = 4$	2p 3p
3.	$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \Rightarrow (2^x + 1)(2^x - 3) = 0$ Cum $2^x > 0$ , obținem $x = \log_2 3$	3p 2p
4.	Numerele naturale de trei cifre care au exact două cifre egale sunt de forma $\overline{aab}$ , $\overline{aba}$ sau $\overline{baa}$ , unde $a$ și $b$ sunt cifre distincte Sunt $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{aab}$ , $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{aba}$ și $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{baa}$ cu $a$ și $b$ cifre distincte, deci numărul cerut este $81 \cdot 3 = 243$	2p 3p
5.	$\overline{AM} = \overline{MB}$ și $\overline{A'M} = \overline{MB'}$ , unde $M$ este mijlocul segmentelor $AB$ , respectiv $A'B'$ $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \overline{AM} + \overline{MB'} + \overline{BM} + \overline{MA'} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$	2p 3p
6.	$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ $BC = 2R \sin A, AC = 2R \sin B$ și $AB = 2R \sin C \Rightarrow AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$X(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(0,1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 1 = 1$	2p 3p
b)	$\det(X(a,b)) = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b - a$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ Pentru $a \neq b$ , $\det(X(a,b)) \neq 0$ , deci sistemul de ecuații are soluție unică	3p 2p
c)	Dacă $a \neq b$ , sistemul are soluția unică $(0, 2, -1)$ și $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 2^2 - (-1)^2 - 2a \cdot 0 = 3$ , pentru orice număr real $a$ Dacă $a = b$ , sistemul are soluțiile $(\alpha, 2 + a\alpha, -1 - a\alpha)$ , unde $\alpha \in \mathbb{R}$ , deci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = (2 + a\alpha)^2 - (-1 - a\alpha)^2 - 2a\alpha = 4 + 4a\alpha + a^2\alpha^2 - 1 - 2a\alpha - a^2\alpha^2 - 2a\alpha = 3$ , pentru orice număr real $a$	2p 3p
2.a)	$5 * 10 = (5 - 1)^{\log_3(10-1)} + 1 = 4^{\log_3 9} + 1 =$ $= 4^2 + 1 = 17$	3p 2p

<b>b)</b>	$x * e = x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)} + 1 = x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)} = x-1$ , pentru orice $x \in M$ , de unde obținem $\log_3(e-1) = 1$ , deci $e = 4 \in M$ Cum $4 * x = 3^{\log_3(x-1)} + 1 = (x-1) + 1 = x$ , pentru orice $x \in M$ , obținem că $e = 4$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	<p>3p</p> <p>2p</p>
<b>c)</b>	$x * x = (x-1)^{\log_3(x-1)} + 1$ , $x * x * x = (x-1)^{\log_3^2(x-1)} + 1$ , pentru orice $x \in M$ Cum $x \in M$ , $(x-1)^{\log_3(x-1)} = (x-1)^{\log_3^2(x-1)} \Rightarrow \log_3(x-1) = \log_3^2(x-1)$ , deci $\log_3(x-1) = 0$ sau $\log_3(x-1) = 1$ și, cum $x > 2$ , obținem $x = 4$	<p>2p</p> <p>3p</p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{2e^{2x} + 4x^3}{2\sqrt{e^{2x} + x^4} + 2} =$ $= \frac{2(e^{2x} + 2x^3)}{2\sqrt{e^{2x} + x^4} + 2} = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4} + 2}, x \in \mathbb{R}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<b>b)</b>	Panta tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = 0$ , situat pe graficul funcției $f$ , este egală cu $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Cum dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$ are panta egală cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , obținem că tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = 0$ , situat pe graficul funcției $f$ este paralelă cu dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$	<p>2p</p> <p>3p</p>
<b>c)</b>	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = e^{2x} + 2x^3 \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x} + 6x^2 > 0$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ , deci funcția $g$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ și $g$ este continuă, există un unic număr real $c$ cu $g(c) = 0$ $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, c) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, c]$ și $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (c, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[c, +\infty)$ , deci $f$ are un unic punct de extrem	<p>2p</p> <p>3p</p>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 \left( 2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x \Big _0^1 =$ $= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<b>b)</b>	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 3 - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} =$ $= \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} > 0$ , pentru orice număr real $x$ , deci funcția $F$ este strict crescătoare	<p>3p</p> <p>2p</p>
<b>c)</b>	$\int_a^b f(x) F^2(x) dx = \int_a^b F^2(x) F'(x) dx = \frac{1}{3} F^3(x) \Big _a^b = \frac{1}{3} (F^3(b) - F^3(a))$ Cum $F$ este strict crescătoare, obținem că $F(a) < F(b)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ , cu $a < b$ , deci $\int_a^b f(x) F^2(x) dx > 0$	<p>3p</p> <p>2p</p>