Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Sesiune vară

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $(1+i)^2-2(1+i)+2=0$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $M(1,2)$ aparține graficului funcției f.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4 x+\log_4(x+1)$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,4)$, $N(0,1)$ și $P(3,0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta MN.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în C. Arătați că $\operatorname{tg}B=\dfrac{1}{\operatorname{tg}A}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.
5p	**b)** Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det\left(A(n)\cdot A(-n)\right)>0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{2}\left(x+y+\lvert x-y\rvert\right)$.
5p	**a)** Arătați că $2*0=2$.
5p	**b)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a\le b$, atunci $a*b=b$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)*\left(x^2+1\right)*(-2x)=10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+3}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 g(x)\,dx = \ln\frac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2-2(1+i)+2=1+2i+i^2-2-2i+2=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$f(1)=2\Rightarrow 1+a-5=2$	**3p**
	$a=6$	**2p**
3.	$\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4\left(x(x+1)\right)$, deci $x^2+1=x^2+x$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 2 și cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{MN}=1$ și, cum dreptele sunt paralele, obținem $m_d=1$	**3p**
	$P\in d$, deci ecuația dreptei d este $y-y_P=m_d\left(x-x_P\right)$, adică $y=x-3$	**2p**
6.	$\operatorname{tg} A=\dfrac{BC}{AC}$	**2p**
	$\operatorname{tg} B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{\frac{BC}{AC}}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}A}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**3p**
b)	$A(a)-2I_3=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&-a\\0&0&0\\3a&0&-3a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$aB=a\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\3&0&-3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a, deci $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\3&0&-3\end{pmatrix}$	**2p**
c)	$A(n)\cdot A(-n)=\begin{pmatrix}4+2n^2&0&-2n^2\\0&4&0\\6n^2&0&4-6n^2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(n)\cdot A(-n)\right)=64\left(1-n^2\right)$, unde n este număr natural	**3p**
	$64\left(1-n^2\right)>0$ şi, cum n este număr natural, obţinem $n=0$	**2p**

2.a)	$2*0=\frac{1}{2}\left(2+0+\lvert 2-0\rvert\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(2+2)=2$	**2p**
b)	$a\le b\Rightarrow \lvert a-b\rvert=b-a$	**2p**
	$a*b=\frac{1}{2}\left(a+b+\lvert a-b\rvert\right)=\frac{1}{2}(a+b+b-a)=\frac{1}{2}\cdot 2b=b$, pentru orice numere reale a și b astfel încât $a\le b$	**3p**
c)	$x^2+1\ge 2x$ și $x^2+1\ge -2x$, pentru orice număr real x, deci $\left((2x)*\left(x^2+1\right)\right)*(-2x)=$ $=\left(x^2+1\right)*(-2x)=(-2x)*\left(x^2+1\right)=x^2+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x^2+1=10$, deci $x=-3$ sau $x=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=$	**3p**
	$=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+3\right)}{x+\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x+\sqrt{x^2+3}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci f este strict crescătoare	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ și f este funcție continuă, ecuația $f(x)=a$ are soluție $\Leftrightarrow a\in(-\infty,0)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)\,dx=\int\limits_0^2\left(x^2+x+3\right)\frac{x}{x^2+x+3}\,dx=\int\limits_0^2 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\vert_0^2=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**
b)	$\int\limits_1^2 g(x)\,dx=\int\limits_1^2\frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx=\int\limits_1^2\frac{\left(x^2+x+3\right)'}{x^2+x+3}\,dx=$	**3p**
	$=\ln\left(x^2+x+3\right)\Big\vert_1^2=\ln 9-\ln 5=\ln\frac{9}{5}$	**2p**
c)	$0\le\frac{x}{x^2+x+3}\le\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci $0\le f^n(x)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ și orice număr natural nenul n	**2p**
	$0\le I_n=\int\limits_a^b f^n(x)\,dx\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$	**3p**