

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați media aritmetică a numerelor reale $a = 2021 - \sqrt{2}$ și $b = 2021 + \sqrt{2}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(\sqrt{x} + 3) + \log_3(\sqrt{x} - 3) = 2$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 16 submulțimi.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3, 0)$, $N(8, 3)$ și $P(6, 3)$. Determinați coordonatele punctului Q , știind că $\overline{MN} + \overline{MP} = \overline{MQ}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$. Arătați că $A = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - m(x + y) + m(m + 1)$, unde $m \in (0, +\infty)$.
- 5p a) Pentru $m = 1$, arătați că $2 \circ 2 = 2$.
- 5p b) Demonstrați că, dacă $2 \circ 1 = 5$, atunci $2 \circ 5 = 1$.
- 5p c) Determinați numărul real x , știind că $(mx^3) \circ (-mx^2) = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2 - 4 \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2x}{x^4 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{11}{5}$.

5p b) Se consideră $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p c) Se consideră funcția $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0) = 0$. Arătați că

$$\int_0^1 xG(x) dx = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.$$

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{2021-\sqrt{2}+2021+\sqrt{2}}{2} =$ $= \frac{2 \cdot 2021}{2} = 2021$	3p 2p
2.	$f(1) = m \Leftrightarrow 1 - 3 + 1 = m$ $m = -1$	3p 2p
3.	$\log_3 \left((\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) \right) = 2$, deci $(\sqrt{x})^2 - 9 = 3^2$ $x - 9 = 9$, deci $x = 18$, care convine	3p 2p
4.	O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi $2^n = 16$, deci $n = 4$	3p 2p
5.	$MNQP$ este paralelogram, deci segmentele MQ și PN au același mijloc Coordonatele punctului Q sunt $x = 11$ și $y = 6$	3p 2p
6.	În $\triangle ABC$, $2 \sin A \cdot \cos A \cdot \cos A = \sin A$, deci $\cos^2 A = \frac{1}{2}$ Cum unghiul A este ascuțit, obținem $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, deci $A = \frac{\pi}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{vmatrix} = a$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$ $\det(A(a)) \neq 0$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	3p 2p
c)	$(A(a))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -1 - \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$ $A(a) + (A(a))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a + \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(a) + (A(a))^{-1}) = 4 \left(a + \frac{1}{a} \right)$ și, cum $a + \frac{1}{a} \geq 2$, obținem că $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	2p 3p

2.a)	Pentru $m=1$, obținem $x \circ y = xy - (x+y) + 2$, deci $2 \circ 2 = 2 \cdot 2 - (2+2) + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$	3p 2p
b)	$2 \circ 1 = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - m(2+1) + m(m+1) = 5 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$ și, cum $m \in (0, +\infty) \Rightarrow m = 3$ $2 \circ 5 = 2 \cdot 5 - 3(2+5) + 3 \cdot 4 = 10 - 21 + 12 = 1$	3p 2p
c)	$-m^2 x^5 - m(mx^3 - mx^2) + m^2 + m = m \Leftrightarrow m^2(x^5 + x^3 - x^2 - 1) = 0$ Cum $m \in (0, +\infty)$, obținem $x^3(x^2 + 1) - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^3 - 1) = 0$, deci $x = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x} = \frac{4x^4 - 4}{x} = \frac{4(x^4 - 1)}{x} = \frac{4(x^2 + 1)(x+1)(x-1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1]$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Cum $f(1) = -1$, f este continuă, f este strict descrescătoare pe $(0, 1)$ și f este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$, obținem că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x^4 + 1)f(x) dx = \int_0^1 (x^4 + 1 + 2x) dx = \left(\frac{x^5}{5} + x + x^2 \right) \Big _0^1 = \frac{1}{5} + 1 + 1 = \frac{11}{5}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x}{x^4 + 1} \right) = 1$ Asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției F are panta egală cu 1	3p 2p
c)	$G(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(1 + \frac{2t}{t^4 + 1} \right) dt = \left(t + \arctg(t^2) \right) \Big _0^x = x + \arctg(x^2), x \in \mathbb{R}$ $\int_0^1 xG(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x \arctg(x^2)) dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)' \arctg(x^2) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} x^2 \arctg(x^2) \Big _0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) \Big _0^1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$	2p 3p