Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Sesiune specială

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5x+20$. Calculați $(g\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x-5}=\frac{1}{16}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=4$, $BC=6$ și măsura unghiului ABC de $120°$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x(2x^2-13)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\frac{1}{30}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=3$.

5p	**b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x f(x)dx = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)=2^2-(3i)^2-9+3i=4+3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+3^2}=5$	**2p**
2.	$f(2)=0$	**2p**
	$(g\circ f)(2)=g(f(2))=5\cdot 0+20=20$	**3p**
3.	$4^{x-5}=4^{-2}\Leftrightarrow x-5=-2$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 8 este $\{118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222\}$, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{900}=\dfrac{1}{90}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	**2p**
	$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(\sphericalangle ABC)=76\Rightarrow AC=2\sqrt{19}\Rightarrow\lvert\overrightarrow{AM}\rvert=AM=\sqrt{19}$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ este dreptunghic în $A\Rightarrow R=\dfrac{BC}{2}=10$	**2p**
	$P_{\Delta ABC}=48$ și $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96\Rightarrow r=\dfrac{96}{24}=4$, de unde obținem $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4)=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(4))=\begin{vmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+21+(-8)-(-14)-2-24=5$	**3p**
b)	$\det(A(a))=5a-15$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(a))=0$, deci $a=3$	**3p**
c)	Pentru $a=3$ soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(1+5\alpha,-1-13\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$z_0^2=x_0+y_0\Leftrightarrow\alpha^2+8\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-8$ sau $\alpha=0$, deci $(x_0,y_0,z_0)=(-39,103,-8)$ sau $(x_0,y_0,z_0)=(1,-1,0)$	**2p**

2.a)	$4*3=\sqrt{4^{\log_3 3}}=$ $=\sqrt{4}=2$	**3p** **2p**
b)	$x*9=\sqrt{x^{\log_3 9}}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$9*x=\sqrt{9^{\log_3 x}}=\sqrt{3^{2\log_3 x}}=\sqrt{\left(3^{\log_3 x}\right)^2}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$x*x=e\Rightarrow\sqrt{x^{\log_3 x}}=9\Rightarrow x^{\log_3 x}=81\Rightarrow\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81$, deci $\log_3^2 x=4$	**3p**
	$\log_3 x=-2$ sau $\log_3 x=2\Rightarrow x=\frac{1}{9}$, care nu convine; $x=9$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x\cdot\left(x^2-4\right)+\left(x^2-9\right)\cdot 2x=$	**3p**
	$=2x\left(x^2-4+x^2-9\right)=2x\left(2x^2-13\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\frac{1}{(x+3)\left(x^2-4\right)}\right)=$	**2p**
	$=1\cdot\frac{1}{(3+3)\left(3^2-4\right)}=\frac{1}{30}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{13}{2}}$, $x=0$ sau $x=\sqrt{\frac{13}{2}}$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{13}{2}},+\infty\right)$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=-\frac{13}{4}$, $f(0)=39$, f continuă pe $\mathbb{R}$, f strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și pe $\left(0,\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și f strict crescătoare pe $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},0\right)$ și pe $\left(\sqrt{\frac{13}{2}},+\infty\right)$, deci ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale $\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{13}{4},39\right)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int\limits_1^2 2x\,dx=x^2\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$\int\limits_0^{\sqrt{3}}f(x)dx=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x\Big\|_0^{\sqrt{3}}-\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=4\cdot\frac{\pi}{3}-x\Big\|_0^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$, de unde obținem $a=\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$\int\limits_{-1}^{1}x f(x)dx=2\int\limits_{-1}^{1}x^2\operatorname{arctg}x\,dx=2\int\limits_{1}^{-1}(-x)^2\operatorname{arctg}(-x)(-1)dx=-2\int\limits_{-1}^{1}x^2\operatorname{arctg}x\,dx=-\int\limits_{-1}^{1}x f(x)dx$	**3p**
	$2\int\limits_{-1}^{1}x f(x)dx=0$, deci $\int\limits_{-1}^{1}x f(x)dx=0$	**2p**