

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt[3]{(6-\sqrt{2})^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 5$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2mx - 6$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că graficul funcției f intersectează axa Ox într-un punct în care și graficul funcției g intersectează axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 4x + 12) = \log_3 27$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(-1,3)$ și $C(1,m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în B .
- 5p 6. Arătați că $\sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{23\pi}{3} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+b)y + z = 0 \\ x + y + (1+c)z = 0 \end{cases}$, unde a , b și c sunt numere reale nenule.
- 5p a) Arătați că $\det(A(-2,0,2)) = -4$.
- 5p b) Arătați că, dacă $abc + ab + ac + bc \neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.
- 5p c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ este întreg.
2. Pe mulțimea $G = (0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$ și se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0,2)$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 1 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right) * f\left(\frac{2}{3}\right) * f\left(\frac{3}{4}\right) * \dots * f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \frac{2n}{n+1}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 3$.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- 5p b) Arătați că funcția f este convexă pe $(0,1)$.

5p c) Demonstrați că $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

5p a) Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1$.

5p b) Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

5p c) Demonstrați că $I_n \leq \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$ Cum $\sqrt[3]{(6-\sqrt{2})^3} = 6-\sqrt{2}$, obținem că $\sqrt[3]{(6-\sqrt{2})^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 6-\sqrt{2} + \sqrt{2}-1 = 5$	2p 3p
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x=3$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în punctul $(3,0)$ $g(3)=0 \Leftrightarrow 9-6m-6=0$, deci $m=\frac{1}{2}$	2p 3p
3.	$\log_2(x^2-4x+12)=3 \Rightarrow x^2-4x+12=8 \Rightarrow x^2-4x+4=0$ $x=2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor divizibilă cu 3 sunt numerele naturale de două cifre care sunt divizibile cu 3, deci sunt 30 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$	2p 2p 1p
5.	$AB \perp BC \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$ Cum $m_{AB}=1$ și $m_{BC}=\frac{m-3}{2}$, obținem $\frac{m-3}{2} = -1$, deci $m=1$	2p 3p
6.	$\sin \frac{25\pi}{6} = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ Cum $\cos \frac{23\pi}{3} = \cos\left(6\pi + \frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, obținem că $\sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{23\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(-2,0,2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-2,0,2)) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3+1+1-1-(-1)-3 = -4$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b,c)) = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = (1+a)(1+b)(1+c) + 1+1-(1+a)-(1+b)-(1+c) = abc + ab + ac + bc \neq 0$, deci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă	2p 3p
c)	Sistemul este compatibil nedeterminat, deci $\det(A(a,b,c))=0 \Rightarrow abc + ab + ac + bc = 0$ $ab + ac + bc = -abc \Rightarrow \frac{ab + ac + bc}{abc} = -1$, deci $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -1$, care este număr întreg	3p 2p

2.a)	$1 * 1 = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1 - 1 - 1 + 2} = \frac{1}{1 - 1 - 1 + 2} =$ $= \frac{1}{1} = 1$	3p 2p
b)	$f(x) * f(y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2} = \frac{\frac{2}{x+1} \cdot \frac{2}{y+1}}{\frac{2}{x+1} \cdot \frac{2}{y+1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{y+1} + 2} =$ $= \frac{4}{4 - 2(y+1) - 2(x+1) + 2(x+1)(y+1)} = \frac{4}{2xy + 2} = \frac{2}{xy + 1} = f(xy), \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty)$	2p 3p
c)	$f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2020}{2021}\right) = \frac{2n}{n+1} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2021}\right) = \frac{2n}{n+1}, \text{ unde } n \text{ este număr natural}$ $\frac{2}{\frac{1}{2021} + 1} = \frac{2n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 2021}{2022} = \frac{2n}{n+1}, \text{ deci } n = 2021$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 \ln x - 2x + 2, x \in (0, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$	3p 2p
b)	$f''(x) = \frac{2(1-x)}{x}, x \in (0, +\infty)$ <p>Cum $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, 1)$, obținem că funcția f este convexă pe $(0, 1)$</p>	2p 3p
c)	<p>$f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f'$ strict descrescătoare pe $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(x) < f'(1)$, deci $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$</p> <p>f continuă și f strict descrescătoare pe $(1, +\infty) \Rightarrow f(x) < f(1)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deci $2x \ln x - x^2 + 3 < 2$, de unde obținem $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$</p>	2p 3p
2.a)	$I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \int_0^1 1 dx =$ $= x \Big _0^1 = 1$	3p 2p
b)	$I_2 = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = 2 \left(x - \arctg x \right) \Big _0^1 =$ $= 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$	3p 2p
c)	$I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 x \cdot \left(\ln(1+x^n) \right)' dx \leq \int_0^1 \left(\ln(1+x^n) \right)' dx =$ $= \ln(1+x^n) \Big _0^1 = \ln 2, \text{ deci } I_n \leq \ln 2, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$	3p 2p