

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)  
Matematică *M\_mate-info*

Testul 2

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $n = (1 + 6i)^2 + (3 - 2i)^2$  este întreg negativ, unde  $i^2 = -1$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + ax$ , unde  $a$  este număr real astfel încât  $f(1) = f(5)$ . Arătați că  $f(2) = f(4)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(2x^2 - 2) = 2\log_3(x + 1)$ .
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,4)$ ,  $B(-4,3)$  și  $C$ , astfel încât  $AOBC$  este paralelogram. Arătați că triunghiul  $ACB$  este dreptunghic isoscel.
- 5p 6. Determinați  $x \in (0, \pi)$  pentru care  $2\sin x \sin(\pi - x) = 1$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(2)) = 1$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $A(a)A(1) = A(1)A(a)$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  are rangul doi.
2. Pe mulțimea  $\mathbb{Z}_6$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + x + y$ .
- 5p a) Arătați că  $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3}$ .
- 5p b) Arătați că  $\hat{0}$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ ,  $f(x) = \hat{4} \circ x$  este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (-1,1) \cup (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$ ,  $x \in (-1,1) \cup (1,+\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul în care graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Oy$ .
- 5p c) Calculați  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(2n))^n$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x-2}{x^2+4}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^2 (x^2+4)f(x)dx = 0$ .

5p b) Calculați  $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)dx$ .

5p c) Demonstrați că  $\int_1^x f(t)dt \geq 0$ , pentru orice număr real  $x$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 2

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

|    |   |                |
|----|---|----------------|
| 1. | $n = 1 + 12i + 36i^2 + 9 - 12i + 4i^2 =$<br>$= 1 - 36 + 9 - 4 = -30$ , care este număr întreg negativ   | 2p<br>3p       |
| 2. | $f(1) = f(5) \Rightarrow 1 + a = 25 + 5a \Rightarrow a = -6$<br>$f(x) = x^2 - 6x$ , de unde obținem $f(2) = -8$ și $f(4) = -8$ , deci $f(2) = f(4)$   | 2p<br>3p       |
| 3. | $2x^2 - 2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$<br>$x = -1$ , care nu convine; $x = 3$ , care convine   | 2p<br>3p       |
| 4. | Există 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile<br>Dacă cifra unităților este $c$ , $1 \leq c \leq 9$ , atunci cifra sutelor poate fi aleasă în $c$ moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor există o singură alegere a cifrei zecilor; în total sunt $9 + 8 + \dots + 1 = 45$ de cazuri favorabile<br>$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{45}{900} = \frac{1}{20}$ | 2p<br>2p<br>1p |
| 5. | $OA = OB = 5$<br>$m_{AO} = \frac{4}{3}$ și $m_{BO} = -\frac{3}{4} \Rightarrow AO \perp BO$ și, cum $AOBC$ este paralelogram, obținem că $AOBC$ este pătrat, deci triunghiul $ACB$ este dreptunghic isoscel  | 2p<br>3p       |
| 6. | $2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$<br>Cum $x \in (0, \pi)$ , obținem $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , deci $x = \frac{\pi}{4}$ sau $x = \frac{3\pi}{4}$   | 2p<br>3p       |

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

|      |  |          |
|------|--|----------|
| 1.a) | $A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$<br>$= 8 + 4 + 9 - 8 - 6 - 6 = 1$   | 2p<br>3p |
| b)   | $A(a)A(1) = \begin{pmatrix} 3a+3 & 5a+4 & 7a+5 \\ 6 & 9 & 12 \\ 2+a & 4+a & 6+a \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$<br>$A(1)A(a) = \begin{pmatrix} a+5 & a+8 & 4a+8 \\ a+5 & a+8 & 4a+8 \\ a+2 & a+4 & 2a+5 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$ , deci $A(a)A(1) = A(1)A(a)$<br>implică $a = 1$ , care convine | 2p<br>3p |

|             |   |                        |
|-------------|---|------------------------|
| <b>c)</b>   | $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2, \text{ pentru orice număr real } a$  | <b>3p</b>              |
|             | $\text{Cum } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ matricea } A(a) \text{ are rangul doi} \Leftrightarrow a=1$  | <b>2p</b>              |
| <b>2.a)</b> | $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} =$ $= \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} = \hat{3}$   | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>b)</b>   | $x \circ \hat{0} = x \cdot \hat{0} + x + \hat{0} = x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{Z}_6$ $\hat{0} \circ x = \hat{0} \cdot x + \hat{0} + x = x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{Z}_6, \text{ deci } \hat{0} \text{ este elementul neutru al legii de compoziție „o”}$   | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $\hat{4} \circ \hat{4} = \hat{0} \Rightarrow \hat{4} \text{ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „o” și simetricul lui este } \hat{4}$ $f(x) = f(y) \Rightarrow \hat{4} \circ x = \hat{4} \circ y \Rightarrow x = y \Rightarrow f \text{ este injectivă, de unde obținem că } \text{Im } f \text{ are 6 elemente, deci } \text{Im } f = \mathbb{Z}_6, \text{ de unde obținem că } f \text{ este bijectivă}$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |  |                        |
|-------------|--|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3} =$ $= \frac{2((x-1)^3 - (x+1)^3)}{(x+1)^3(x-1)^3} = \frac{-4(3x^2+1)}{(x+1)^3(x-1)^3} = \frac{-4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}, x \in (-1,1) \cup (1,+\infty)$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | <p>Cum <math>f(0) = 0</math>, graficul funcției <math>f</math> intersectează axa <math>Oy</math> în punctul <math>O(0,0)</math></p> <p><math>f'(0) = 4</math>, deci ecuația tangentei este <math>y = 4x</math></p>   | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(4) + \dots + f(2n))^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)^n =$ $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{-1}{(2n+1)^2} \right)^{-(2n+1)^2} \right)^{\frac{-n}{(2n+1)^2}} = e^0 = 1$   | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_0^2 (x^2 + 4) f(x) dx = \int_0^2 (2x - 2) dx = (x^2 - 2x) \Big _0^2 =$ $= 4 - 4 = 0$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x) dx = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+4} dx - 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4} dx = \ln(x^2+4) \Big _0^{2\sqrt{3}} - \arctg \frac{x}{2} \Big _0^{2\sqrt{3}} =$ $= \ln 16 - \ln 4 - \arctg \sqrt{3} = 2 \ln 2 - \frac{\pi}{3}$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | <p>Funcția <math>F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>F(x) = \int_1^x f(t) dt</math> este derivabilă și <math>F'(x) = f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2+4}</math>, <math>x \in \mathbb{R}</math></p> <p><math>F'(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, 1] \Rightarrow F</math> este descrescătoare pe <math>(-\infty, 1]</math> și <math>F'(x) \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in [1, +\infty) \Rightarrow F</math> este crescătoare pe <math>[1, +\infty) \Rightarrow F(x) \geq F(1)</math>, pentru orice număr real <math>x</math>, de unde obținem că <math>\int_1^x f(t) dt \geq 0</math>, pentru orice număr real <math>x</math></p> | <b>2p</b><br><b>3p</b> |