Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-z-i=-1$.
5p	**2.** Determinați cel mai mic număr natural n pentru care ecuația $x^2-3x+3-n=0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25x)+\log_x 5=4$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 3.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(4,2)$ și $C(3,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.
5p	**6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x-\sin(\pi-x)+\cos x+\cos(\pi-x)+\operatorname{tg}2x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det(A+I_3)=1$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A\cdot A=O_3$.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a, b și c, astfel încât $X=aI_3+bA+cA\cdot A$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\lvert x-y\rvert$.
5p	**a)** Arătați că $(5*2)*1=2$.
5p	**b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.
5p	**c)** Demonstrați că $(a*b)+(b*c)\geq a*c$, pentru orice numere reale a, b și c.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{e^x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $x-1\leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2 f^2(x)\,dx=4$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 \ln\left(f(x)\right)dx$.
5p	**c)** Demonstrați că există un singur număr real x, $x \in [0,+\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt = 2021$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-z-i=1+2i+i^2-1-i-i=$	**3p**
	$=1+2i-1-1-2i=-1$	**2p**
2.	$\Delta=9-4(3-n)=4n-3$	**2p**
	$\Delta>0\Leftrightarrow n>\frac{3}{4}$, deci $n=1$	**3p**
3.	$2+\log_5 x+\frac{1}{\log_5 x}=4\Rightarrow(\log_5 x-1)^2=0$	**3p**
	$\log_5 x=1$, deci $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În această mulțime există 45 de numere divizibile cu 2, 30 de numere divizibile cu 3 și 15 numere divizibile atât cu 2 cât și cu 3, deci sunt $45+30-15=60$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$	**1p**
5.	Distanța de la punctul C la dreapta AB este egală cu 2	**2p**
	$AB=5\Rightarrow\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{5\cdot 2}{2}=5$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x\Rightarrow E(x)=\operatorname{tg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{8}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	**3p**

c)	Pentru $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, obținem $A\cdot X=\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $X\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot X = X\cdot A \Rightarrow d=h=0$, $g=0$, $a=e=i$, $b=f$, deci $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=aI_3+bA+cA\cdot A$, unde a, b și c sunt numere reale	**3p**
2.a)	$5*2=\lvert 5-2\rvert=3$	**2p**
	$(5*2)*1=3*1=\lvert 3-1\rvert=2$	**3p**
b)	$x*y=\lvert x-y\rvert=\lvert -(y-x)\rvert=$	**2p**
	$=\lvert y-x\rvert=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$(a*b)+(b*c)=\lvert a-b\rvert+\lvert b-c\rvert\geq\lvert (a-b)+(b-c)\rvert=$	**3p**
	$=\lvert a-b+b-c\rvert=\lvert a-c\rvert=a*c$, pentru orice numere reale a, b și c	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-2)e^x-\left(x^2-2x+1\right)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x\left(2x-2-x^2+2x-1\right)}{e^{2x}}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}=\dfrac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,3]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $[1,3]$, f este descrescătoare pe $[3,+\infty)$ și $f(3)=\dfrac{4}{e^3}$, deci $f(x)\leq\dfrac{4}{e^3}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**2p**
	$\dfrac{(x-1)^2}{e^x}\leq 4e^{-3}\Rightarrow (x-1)^2\leq 4e^{x-3}$, deci $x-1\leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2 f^2(x)\,dx=\int_0^2 (x+1)\,dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right\rvert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{2}+2=4$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 \ln\sqrt{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (x+1)'\ln(x+1)\,dx=\left.\frac{1}{2}(x+1)\ln(x+1)\right\rvert_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 dx=$	**3p**
	$=\ln 2-\left.\dfrac{1}{2}x\right\rvert_0^1=\ln 2-\dfrac{1}{2}$	**2p**

c)	$F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt$ derivabilă și $F'(x)=e^{f(x)}>0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**2p**
	F este strict crescătoare și continuă, $F(0)=0$ și $F(2021)=\int_0^{2021} e^{\sqrt{t+1}}dt \geq \int_0^{2021} 1dt=2021$, deci există un singur $x\in[0,+\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=2021$	**3p**