Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră un număr complex z care are proprietatea $z^2=1-i$. Arătați că $z^4+2i=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x)>1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+2)+\log_5(2x-1)=2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$ și $C(4,5)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

5p **6.** Determinați $x\in(0,1)$ pentru care $4\cos x\cos(\pi-x)+3=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=6$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B+B=B\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y, știind că $(x+1)A\cdot B+(y-2)B\cdot A=B\cdot B\cdot B$.

2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x*y=x^y$.

5p **a)** Arătați că $2*4=4*2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” **nu** este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2*2)*n<64$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln\left(x^2+x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int\limits_0^1 e^x\left|f(x)\right|dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int\limits_0^1 f^n(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^4=\left(z^2\right)^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$	**3p**
	$z^4+2i=-2i+2i=0$	**2p**
2.	$\Delta=4-4m$ și valoarea minimă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4\cdot 1}=-\frac{4-4m}{4}=m-1$	**3p**
	$m-1>1$, deci $m\in(2,+\infty)$	**2p**
3.	$\log_5(x+2)(2x-1)=2\Rightarrow(x+2)(2x-1)=25\Rightarrow 2x^2+3x-27=0$	**3p**
	$x=-\frac{9}{2}$, care nu convine; $x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale care au suma cifrelor divizibilă cu 9 sunt multiplii de 9, deci mulțimea cazurilor favorabile este $\{9\cdot 12, 9\cdot 13, 9\cdot 14,\ldots, 9\cdot 111\}$ și are 100 de elemente	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}=\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+4\vec{j}$ și $\overrightarrow{AD}=(x_D-2)\vec{i}+(y_D-1)\vec{j}$	**3p**
	$\vec{i}+\vec{j}+2\vec{i}+4\vec{j}+(x_D-2)\vec{i}+(y_D-1)\vec{j}=\vec{0}\Rightarrow x_D=-1$ și $y_D=-4$	**2p**
6.	Cum $\cos(\pi-x)=-\cos x$, obținem $-4\cos^2 x+3=0$, deci $\cos^2 x=\frac{3}{4}$	**2p**
	Pentru $x\in(0,1)$, $\cos x>0$, deci $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x=\frac{\pi}{6}$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 2\cdot 3+0+0-0-0-0=6$	**3p**
b)	$A\cdot B+B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=B\cdot A$	**2p**

c)	Cum $B\cdot B\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, obținem $x+1+2(y-2)=0$ și $2(x+1)+3(y-2)=0$	**3p**
	$x=-1$, $y=2$	**2p**
2.a)	$2*4=2^4=16$	**2p**
	$4*2=4^2=16$, deci $2*4=4*2$	**3p**
b)	$2*1=2^1=2$ și $1*2=1^2=1$	**2p**
	Deoarece $2*1\neq 1*2$, legea de compoziție „$*$” nu este comutativă	**3p**
c)	$(2*2)*n<64 \Leftrightarrow 4*n<64 \Leftrightarrow 4^n<4^3$	**3p**
	Cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2(x^2+x+1)+2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(x+1)-f(x)=2(x+1)+\ln(x^2+3x+3)-2x-\ln(x^2+x+1)=2+\ln\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\ln\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}\right)=2+\ln 1=2$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice număr real $x\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(2+\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}\right)$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{1}=0$, deci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ și, cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $\mathbb{R}$, obținem că f este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(2x-1)dx=\left.(x^2-x)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^x\|f(x)\|dx=\int_0^1 e^x\|2x-1\|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}e^x(1-2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 e^x(2x-1)dx=\left.e^x(3-2x)\right\|_0^{\frac{1}{2}}+\left.e^x(2x-3)\right\|_{\frac{1}{2}}^1=$	**3p**
	$=2\sqrt{e}-3-e+2\sqrt{e}=4\sqrt{e}-e-3$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1(2x-1)^n dx=\left.\dfrac{(2x-1)^{n+1}}{2(n+1)}\right\|_0^1=\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2(n+1)}$, unde n este număr natural nenul	**3p**
	Cum $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**