

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul complex z , pentru care $z - 2\bar{z} = -2 + 6i$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m$, unde m este număr real pozitiv. Determinați numărul real pozitiv m pentru care numerele $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-1) = \log_5(3x+1)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A .
- 5p 5. Se consideră punctele A , B , C și D , astfel încât $2\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AC}$. Demonstrați că $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de 30° . Arătați că lungimea laturii BC este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(m) + A(-m)) = 8$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m) \cdot A(m) = A(0)$.
- 5p c) Demonstrați că $A(1) - A(2) + A(3) - A(4) + \dots + A(2n-1) - A(2n) = n(A(-1) - A(0))$, pentru orice număr natural nenul n .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.
- 5p a) Arătați că $\frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x * (-x)) * ((-x) * x) = 24x$.
- 5p c) Demonstrați că $x * \frac{1}{x} \geq 6$, pentru orice număr real nenul x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x}$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \ln x$.

5p a) Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}} (f(x) + \ln x) dx = \frac{3}{4}$.

5p b) Calculați $\int_1^e x(x^3 - f(x)) dx$.

5p c) Arătați că $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} f(\sqrt{x}) dx = \frac{2e^3 - 5}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a + ib - 2(a - ib) = -2 + 6i \Leftrightarrow -a + 3ib = -2 + 6i$, unde $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a = 2$ și $b = 2$, deci $z = 2 + 2i$	3p 2p
2.	$f^2(1) = f(0) \cdot f(2) \Leftrightarrow (1+m)^2 = m(4+m) \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 4m + m^2$ $2m = 1$, deci $m = \frac{1}{2}$, care convine	3p 2p
3.	$(x-1)^2 = 3x+1 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$ $x = 0$, care nu convine; $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ are 21 de elemente, deci sunt 21 de cazuri posibile Numerele din mulțimea A al căror pătrat aparține mulțimii A sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{21}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{AD} - \overline{BD} = \overline{AC} - \overline{AD}$ $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AC} + \overline{DA} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC}$	2p 3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului Cum $\sin A = \frac{1}{2}$, obținem $2BC = 2R$, deci $BC = R$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(m) + A(-m) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real m	2p
	$\det(A(m) + A(-m)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8$, pentru orice număr real m	3p
b)	$A(m) \cdot A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2m & 1 & 0 \\ m^2 & 2m & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real m	3p
	$A(m) \cdot A(m) = A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2m & 1 & 0 \\ m^2 & 2m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow m = 0$	2p

e)	$A(2k-1) - A(2k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pentru orice număr natural nenul } k$ $A(1) - A(2) + A(3) - A(4) + \dots + A(2n-1) - A(2n) = n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = n(A(-1) - A(0)), \text{ pentru}$ <p>orice număr natural nenul n</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.a)	$\frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$ $= \frac{1}{4} + 3 + \frac{9}{4} = \frac{11}{2}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$x * (-x) = (-x) * x = -2x^2, \text{ pentru orice număr real } x$ $(-2x^2) * (-2x^2) = 24x \Leftrightarrow 24x^4 = 24x, \text{ de unde obținem } x = 0 \text{ sau } x = 1$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	$x * \frac{1}{x} = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 4 + \frac{1}{x^2}, \text{ pentru orice număr real nenul } x$ $\left(x * \frac{1}{x}\right) - 6 = x^2 + 4 + \frac{1}{x^2} - 6 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0, \text{ deci } x * \frac{1}{x} \geq 6, \text{ pentru orice}$ <p>număr real nenul x</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2} - (x+2) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} =$ $= \frac{x^2+2 - x^2 - 2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}, x \in \mathbb{R}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+2)^2}{x^2+2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4x+2}{x^2+2}\right)^x =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4x+2}{x^2+2}\right)^{\frac{x(4x+2)}{x^2+2}} = e^4$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	$f'(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } (-\infty, 1] \text{ și } f'(x) \leq 0, \text{ pentru}$ $\text{orice } x \in [1, +\infty) \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } [1, +\infty) \text{ și, cum } f(1) = \sqrt{3}, \text{ obținem că}$ $f(x) \leq \sqrt{3}, \text{ pentru orice număr real } x$ $f(e^x) \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{e^x+2}{\sqrt{e^{2x}+2}} \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{e^x+2}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{e^{2x}+2}, \text{ pentru orice număr real } x$	<p>3p</p> <p>2p</p>
2.a)	$\int_1^{\sqrt{2}} (f(x) + \ln x) dx = \int_1^{\sqrt{2}} x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _1^{\sqrt{2}} =$ $= \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	<p>3p</p> <p>2p</p>

<p>b)</p>	$\int_1^e x(x^3 - f(x)) dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>c)</p>	$\int_1^{e^2} \frac{1}{x} f(\sqrt{x}) dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \left((\sqrt{x})^3 - \ln \sqrt{x} \right) dx = \int_1^{e^2} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \ln x \right) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{1}{4} \ln^2 x \right) \Big _1^{e^2} =$ $= \frac{2}{3} e^3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \ln^2(e^2) = \frac{2}{3} e^3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{2e^3 - 5}{3}$	<p>3p</p> <p>2p</p>