Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră o funcție impară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ este pară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^x=2^{x+1}-2\sqrt{2}$.

5p **4.** Determinați termenul care îl conține pe x^8 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În planul triunghiului ABC se consideră punctul M, astfel încât $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Determinați numărul real k, știind că $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{CM}$.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+6\cos x-\sin x-3=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & m & 1\\ m-1 & m & -m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2+z_1z_2$.

5p **a)** Arătați că $(2+i)\circ(2-i)=9$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, numărul $A=\left(-1+(a+1)i\right)\circ\left(-1+(a-1)i\right)$ este real strict mai mic decât 0.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(e^x f(x)-2\right)dx=-\frac{2}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4^3}=4=$	**3p**
	$=2^2=(\log_3 9)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$f(-x)=-f(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$g(-x)=(f(-x))^2=(-f(x))^2=(f(x))^2=g(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția g este pară	**3p**
3.	$2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^x-2\cdot 2^x+2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 2^x\left(2^x-\sqrt{2}\right)-2\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(2^x-2\right)\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=\frac{1}{2}$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{10}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{10-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=C_{10}^k x^{\frac{3(10-k)}{2}-2k}=C_{10}^k x^{\frac{30-7k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,10\}$	**3p**
	$\frac{30-7k}{2}=8 \Leftrightarrow k=2$, deci $T_3=C_{10}^2 x^8$ îl conține pe x^8	**2p**
5.	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, deci punctul M este mijlocul segmentului BC	**3p**
	$\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{CM}$, deci $k=-2$	**2p**
6.	$2\sin x\cos x+6\cos x-\sin x-3=0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+3)-(\sin x+3)=0 \Leftrightarrow (\sin x+3)(2\cos x-1)=0$	**2p**
	$\sin x+3\neq 0$, deci $\cos x=\frac{1}{2}$ și, cum $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\frac{\pi}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{vmatrix}=2+1+0-4-0-0=$	**3p**
	$=3-4=-1$	**2p**
b)	Cum $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ m-1 & m\end{vmatrix}=-m+m-1=$	**3p**
	$=-1\neq 0$, deci matricea $M(m)$ are rangul cel puțin egal cu 2, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$M(m)\cdot A=I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m+2 & -m-1 & 0\\ -m-2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$m=-2$, care convine	**2p**
2.a)	$(2+i)\circ(2-i)=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**

b)	$A=-1+(a+1)i-1+(a-1)i+(-1+(a+1)i)(-1+(a-1)i)=$	**2p**
	$=-2+2ai+1-(a-1)i-(a+1)i-(a^2-1)=-a^2<0$, pentru orice număr real nenul a	**3p**
c)	$2z+z^2=-5 \Leftrightarrow z^2+2z+5=0$	**3p**
	$z=-1-2i$ sau $z=-1+2i$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(\ln(x+1)-\ln(x+3))'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=$	**3p**
	$=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\ln\frac{x+1}{x+3}=-\infty$	**3p**
	Dreapta de ecuație $x=-1$ este asimptota verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^x=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+3}}=\ln e^{-2}=-2$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^x f(x)-2\right)dx=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$	**2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e\left(\ln^2 x+1\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\int_1^e\left(\ln^2 x+1\right)\cdot(\ln x)'dx=\left(\frac{\ln^3 x}{3}+\ln x\right)\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{e^x}\le 0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare, de unde obținem că $f(1)\le f(x)\le f(0)$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$, $\frac{2}{e}\le f(x)\le 1\Rightarrow\frac{2}{e}x^n\le x^n f(x)\le x^n$, deci $\frac{2}{e(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, de unde obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$	**3p**