

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

Testul 7

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați numărul elementelor mulțimii  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n + 1 < 10\}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 10x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care vârful parabolei asociate funcției  $f$  este situat pe axa  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $x + \sqrt{x - 5} = 7$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să **nu** fie multiplu de 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,4)$  și  $B(-1,3)$ . Determinați coordonatele punctului  $C$  astfel încât  $\overline{AB} + 2\overline{BC} = \vec{0}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu unghiul  $A$  ascuțit,  $AB = 4$ ,  $AC = 5$  și aria egală cu 6. Calculați cosinusul unghiului  $A$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a+1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + (a+1)y + az = 6a + 3 \\ x + y + (a+1)z = 4a + 7 \\ 2x + ay + z = 2a + 6 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(a)) = 2(a^2 + 1)$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $A(a) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(a)$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $(x_0, y_0, z_0)$  este soluția sistemului de ecuații, atunci  $x_0$ ,  $y_0$  și  $z_0$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2. Pe mulțimea  $M = [0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{2(x+y)}{xy+2}$ .
- 5p** a) Arătați că  $x * 0 = x$ , pentru orice  $x \in M$ .
- 5p** b) Arătați că  $x * y < 2$ , pentru orice  $x, y \in [1, +\infty)$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale nenule pentru care  $m * n$  este număr natural.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = e^x(x-1)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$ .
- 5p** c) Demonstrați că graficul funcției  $f$  intersectează orice dreaptă paralelă cu axa  $Ox$  în cel mult un punct.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x^3 + 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^1 f(x) dx = 2$ .

**5p** | **b)** Calculați  $\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx$ .

**5p** | **c)** Demonstrați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \ln(f(t)) dt = +\infty$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 7

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$2n + 1 < 10 \Leftrightarrow n < \frac{9}{2}$ Cum $n$ este număr natural, obținem că mulțimea $M$ are 5 elemente	2p 3p
2.	$\Delta = 100 - 4m$ , $y_V = m - 25$ Vârful parabolei asociate funcției $f$ este situat pe axa $Ox \Leftrightarrow y_V = 0 \Leftrightarrow m = 25$	2p 3p
3.	$\sqrt{x-5} = 7-x \Rightarrow x-5 = (7-x)^2$ , deci $x^2 - 15x + 54 = 0$ $x = 6$ , care convine; $x = 9$ , care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Sunt $9 \cdot 10 \cdot 8 = 720$ de numere naturale de trei cifre care nu sunt multipli de 5, deci sunt 720 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{720}{900} = \frac{4}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AC} + \overline{BC} = \vec{0}$ , deci punctul $C$ este mijlocul segmentului $AB$ Coordonatele punctului $C$ sunt $x_C = 1$ , $y_C = \frac{7}{2}$	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Rightarrow 6 = \frac{4 \cdot 5 \cdot \sin A}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{5}$ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = \frac{16}{25}$ și, cum unghiul $A$ este ascuțit, obținem $\cos A = \frac{4}{5}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a+1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + 2(a+1)^2 - 2a - a(a+1) - (a+1) =$ $= 2a^2 + 2 = 2(a^2 + 1)$ , pentru orice număr real $a$	3p 2p
b)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $A(a) \cdot A(0) = \begin{pmatrix} 3a+2 & a+2 & 2a+1 \\ 2a+4 & 2 & a+2 \\ a+4 & a+2 & a+1 \end{pmatrix}$ , $A(0) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a+2 & 2a+1 \\ 4 & 2a+2 & 2a+2 \\ 4 & 3a+2 & 2a+1 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$ $\begin{pmatrix} 3a+2 & a+2 & 2a+1 \\ 2a+4 & 2 & a+2 \\ a+4 & a+2 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a+2 & 2a+1 \\ 4 & 2a+2 & 2a+2 \\ 4 & 3a+2 & 2a+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p
c)	Sistemul este compatibil determinat și are soluția $(x_0, y_0, z_0)$ , cu $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ și $z_0 = 4$ Cum $x_0 z_0 = 4 = y_0^2$ , obținem că $x_0$ , $y_0$ și $z_0$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	3p 2p

<b>2.a)</b>	$x * 0 = \frac{2(x+0)}{x \cdot 0 + 2} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{2x}{2} = x$ , pentru orice $x \in M$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * y - 2 = \frac{2(x+y)}{xy+2} - 2 = \frac{2x+2y-2xy-4}{xy+2} = -2 \cdot \frac{xy-x-y+2}{xy+2} =$	<b>3p</b>
	$= -2 \cdot \frac{(x-1)(y-1)+1}{xy+2} < 0$ , pentru orice $x, y \in [1, +\infty) \Rightarrow x * y < 2$ , pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale nenule, obținem $0 < m * n < 2$ și, cum $m * n$ este număr natural, obținem $m * n = 1$	<b>2p</b>
	$\frac{2(m+n)}{mn+2} = 1 \Leftrightarrow mn - 2m - 2n + 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(n-2) = 2$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale nenule, obținem perechile $(3,4)$ și $(4,3)$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 5) + e^x(2x - 4) =$	<b>3p</b>
	$= e^x(x^2 - 2x + 1) = e^x(x-1)^2$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(x^2 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{e^x} =$	<b>2p</b>
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ , $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$	<b>2p</b>
	și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ Cum funcția $f$ este continuă în $x = 1$ , obținem că $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ este injectivă, deci graficul funcției $f$ intersectează orice paralelă la $Ox$ în cel mult un punct	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (4x^3 + 1) dx = (x^4 + x) \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= 1 + 1 = 2$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx = \int_0^1 x^2 (4x^3 + 1)^3 dx = \frac{1}{12} \int_0^1 (4x^3 + 1)' (4x^3 + 1)^3 dx = \frac{1}{12} \cdot \frac{(4x^3 + 1)^4}{4} \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{5^4 - 1}{48} = 13$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$4t^3 + 1 \geq 5$ , pentru orice $t \in [1, +\infty) \Rightarrow \int_1^x \ln(f(t)) dt = \int_1^x \ln(4t^3 + 1) dt \geq \int_1^x \ln 5 dt = (x-1) \ln 5$ ,	<b>3p</b>
	pentru orice $x \in [1, +\infty)$ Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \ln 5 = +\infty$ , obținem $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \ln(f(t)) dt = +\infty$	<b>2p</b>