

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați produsul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt[3]{7} < x \leq \log_2 21\}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d de ecuație $y = 5x + 2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 9^x - 3^{2x} - 3 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte.
- 5p** 5. Se consideră punctul M în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overline{MB} - \overline{MC} = \overline{AB}$. Arătați că patrulaterul $AMBC$ este paralelogram.
- 5p** 6. Calculați $\operatorname{tg} x$, știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\frac{8}{17}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x + y + az = -5 \\ x - y - az = 10 \\ (2-a)x + y + z = 1-a \end{cases}$,

unde a este număr real.

- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.
- 5p** c) Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) și x_0 este număr întreg.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{5}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 5 = 5$.
- 5p** b) Determinați numărul real x , $x \geq 0$, pentru care $\sqrt{x} * \sqrt{x} = 5$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui a , $a \neq 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” este strict mai mic decât 0.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 1 + \ln(x+1) - \frac{2}{x+1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.
- 5p** c) Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției f , sunt concurente.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx = 7$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

5p c) Știind că $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1} + 4$ este o primitivă a funcției f , arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)dx = 32$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$1 < \sqrt[3]{7} < 2$ și $4 < \log_2 21 < 5$, deci $A = \{2, 3, 4\}$ Produsul elementelor mulțimii A este egal cu 24	3p 2p
2.	$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 4x = 5x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d sunt $x = -1$ și $x = 2$	3p 2p
3.	$2 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3$ $2x = 1$, deci $x = \frac{1}{2}$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de trei cifre, care au cifrele numere prime distincte, are $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ de elemente, deci sunt 24 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{24}{900} = \frac{2}{75}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{MB} - \overline{MC} = \overline{AB} - \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MB} + \overline{CM} = \overline{AB} + \overline{BM}$ $\overline{CB} = \overline{AM}$, deci $AMBC$ este paralelogram	3p 2p
6.	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{225}{289}$ Cum $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = -\frac{15}{17}$, deci $\operatorname{tg} x = \frac{8}{15}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -3 + 2 + 0 - 0 - (-6) - 1 = 4$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = a^2 + a - 2$, pentru orice număr real a Sistemul de ecuații nu este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A(a)) = 0$, deci $a = -2$ sau $a = 1$	2p 3p
c)	Sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) , deci $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ și $x_0 = \frac{5}{a+2}$ $x_0 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (a+2) \mid 5$ și, cum $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, obținem $a = 3$	3p 2p
2.a)	$1 * 5 = 1 + 5 - \frac{1 \cdot 5}{5} =$ $= 1 + 5 - 1 = 5$	3p 2p

Probă scrisă la matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 8

Barem de evaluare și de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

b)	$\sqrt{x} + \sqrt{x} - \frac{x}{5} = 5 \Leftrightarrow 10\sqrt{x} = 25 + x$, unde x este număr real, $x \geq 0$	2p
	$(\sqrt{x} - 5)^2 = 0$, de unde obținem $x = 25$	3p
c)	$x * 0 = 0 * x = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”	1p
	$a * a' = 0 \Leftrightarrow 5a + 5a' - aa' = 0 \Leftrightarrow a'(a - 5) = 5a$, deci $a' = \frac{5a}{a - 5}$, pentru orice număr real a , $a \neq 5$, unde a' este simetricul lui a	3p
	$\frac{5a}{a - 5} < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 5)$	1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \ln(x+1) + (x-1) \cdot \frac{1}{x+1} =$	3p
	$= \ln(x+1) + \frac{x+1-2}{x+1} = 1 + \ln(x+1) - \frac{2}{x+1}$, $x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{(x-1)^2}{x} \ln(x+1) \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) \right) =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{(x-1)^2}{x^2} \ln(x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = -\infty$	3p
c)	$f''(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2} > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$	2p
	f' este injectivă pe $(0, +\infty)$, deci $f'(a) \neq f'(b)$, pentru orice $a, b \in (0, +\infty)$, cu $a \neq b$, de unde obținem că tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ sunt concurente, pentru orice $a, b \in (0, +\infty)$, cu $a \neq b$	3p
2.a)	$\int_1^2 x\sqrt{x+1} f(x) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$	3p
	$= 8 - 1 = 7$	2p
b)	$\int_0^1 \frac{9x^2}{x+1} dx = 9 \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx = 9 \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = 9 \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) \Big _0^1 =$	3p
	$= 9 \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 - 0 \right) = 9 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$	2p
c)	$\int_0^3 f(x) F(x) dx = \int_0^3 F'(x) F(x) dx = \frac{1}{2} F^2(x) \Big _0^3 =$	3p
	$= \frac{1}{2} (F^2(3) - F^2(0)) = \frac{1}{2} (8^2 - 0^2) = 32$	2p