

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} > \frac{3}{4}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 18$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f \circ f$ cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x} - 2^{2-x} + 2^{5-x} = 9$.
- 5p** 4. Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a, 1)$ și $B(-2, 5)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei de ecuație $y = 2x + 3$.
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC , știind că $\text{tg } C = 1$ și că triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 3.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(3)) = 10$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr natural m , $m \geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy - 4}{x + y - 4}$.
- 5p** a) Arătați că $8 \circ 8 = 5$.
- 5p** b) Arătați că $(x + 2) \circ (y + 2) > (x + y) \circ 4$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $x \in M$ și n este număr natural, $n \geq 2$, astfel încât $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x} = 2^n - \frac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 3) - 2 \ln(x^2 - 9)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(1-x)}{x^2 - 9}$, $x \in (3, +\infty)$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} ((x - 3)f(x)) = 0$.

2. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

5p a) Arătați că $\int_1^{\frac{3}{2}} \left(f(x) - \frac{x^2}{x^2 - 4} \right) dx = \frac{5}{8}$.

5p b) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + f(-x)) dx = 4(1 - \ln 3)$.

5p c) Determinați $a \in (0, \sqrt{3})$, pentru care $\int_a^{\sqrt{3}} \sqrt{x - f(x)} dx = \sqrt{3} - 1$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} = 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} =$ $= \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{3^5}\right) > \frac{3}{4}$	3p
2.	$(f \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow -3f(x) + 18 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 6$ $-3x + 18 = 6 \Leftrightarrow x = 4$, deci abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f \circ f$ cu axa Ox este egală cu 4	3p 2p
3.	$2^{2-x} (2 - 1 + 2^3) = 9 \Leftrightarrow 2^{2-x} = 1$ $x = 2$	3p 2p
4.	$T_{k+1} = C_{14}^k (x^3)^{14-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{14}^k x^{42-3k-\frac{k}{2}} = C_{14}^k x^{\frac{84-7k}{2}}$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$ $\frac{84-7k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 12$, deci $T_{13} = C_{14}^{12} = 91$ nu îl conține pe x	3p 2p
5.	Punctul $M\left(\frac{a-2}{2}, 3\right)$ este mijlocul segmentului AB $3 = 2 \cdot \frac{a-2}{2} + 3 \Leftrightarrow a = 2$	3p 2p
6.	În $\triangle ABC$, $\operatorname{tg} C = 1 \Rightarrow \sphericalangle C = \frac{\pi}{4}$, deci $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $2R = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(3)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 12 + 1 + (-1) - 4 - (-3) - 1 = 10$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = a^2 + a - 2$, pentru orice număr real a , deci $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ sau $a = -2$ Cum $\det(A(n)) \neq 0$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$	3p 2p

c)	Pentru orice număr natural $m \geq 2$, $A(m)$ este inversabilă, deci $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det(A(m)) = -1$ sau $\det(A(m)) = 1$	3p
	Cum $m \geq 2$, obținem $\det(A(m)) = m^2 + m - 2 \geq 4$, deci $A^{-1}(m)$ nu are toate elementele numere întregi	2p
2.a)	$8 \circ 8 = \frac{8 \cdot 8 - 4}{8 + 8 - 4} =$	3p
	$= \frac{60}{12} = 5$	2p
b)	$(x+2) \circ (y+2) = \frac{xy + 2x + 2y}{x+y}$, $(x+y) \circ 4 = \frac{4x + 4y - 4}{x+y}$, pentru orice $x, y \in M$	2p
	$(x+2) \circ (y+2) - (x+y) \circ 4 = \frac{xy - 2x - 2y + 4}{x+y} = \frac{(x-2)(y-2)}{x+y}$, pentru orice $x, y \in M$ și, cum $x > 2$ și $y > 2$, obținem că $(x+2) \circ (y+2) > (x+y) \circ 4$, pentru orice $x, y \in M$	3p
c)	$x \circ x = \frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \frac{x+2}{2}$, $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x} = \frac{x + 2^{n+1} - 2}{2^n}$, unde $x \in M$ și n este număr natural,	3p
	$n \geq 2$ $\frac{x + 2^{n+1} - 2}{2^n} = 2^n - \frac{1}{2^n} \Rightarrow x = 2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 1 \Rightarrow x = (2^n - 1)^2$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x-3} - 2 \cdot \frac{2x}{x^2-9} =$	3p
	$= \frac{x+3-4x}{x^2-9} = \frac{3(1-x)}{x^2-9}$, $x \in (3, +\infty)$	2p
b)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (3, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(3, +\infty)$, deci f este injectivă	2p
	Cum f este continuă pe $(3, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, obținem că f este surjectivă, deci f este bijectivă	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 3} ((x-3)f(x)) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{x-3}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{3(x-1)}{x^2-9}}{-\frac{1}{(x-3)^2}} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-1)(x-3)^2}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-1)(x-3)}{x+3} = 0$	2p
2.a)	$\int_1^{\frac{3}{2}} \left(f(x) - \frac{x^2}{x^2-4} \right) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^{\frac{3}{2}} =$	3p
	$= \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{5}{8}$	2p

<p>b)</p>	$\int_{-1}^1 (f(x) + f(-x)) dx = \int_{-1}^1 \frac{2x^2}{x^2 - 4} dx = 2 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 4 + 4}{x^2 - 4} dx = 2 \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{4}{x^2 - 4}\right) dx = 2 \left(x + \ln \left \frac{x-2}{x+2} \right \right) \Big _{-1}^1 =$ $= 2 \left(1 + \ln \frac{1}{3} + 1 - \ln 3 \right) = 4(1 - \ln 3)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>c)</p>	$\int_a^{\sqrt{3}} \sqrt{x - f(x)} dx = \int_a^{\sqrt{3}} \sqrt{x - x - \frac{x^2}{x^2 - 4}} dx = \int_a^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx = -\sqrt{4 - x^2} \Big _a^{\sqrt{3}} = \sqrt{4 - a^2} - 1, \quad a \in (0, \sqrt{3})$ $\sqrt{4 - a^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 1 \text{ și, cum } a \in (0, \sqrt{3}), \text{ obținem } a = 1$	<p>3p</p> <p>2p</p>