Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numerele $\log_2 3$, $\log_2 6$ și $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$. Determinați numărul real x pentru care $f(x)=x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lvert 2x-1\rvert=2x+1$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară și cifra unităților impară.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=8\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. În triunghiul ABC dreptunghic în A, $BC=12$ și $B=\frac{\pi}{6}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x^2-5xy+2y^2$.
5p	**a)** Arătați că $1\circ 2=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x\circ 3^x=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\le(x-1)^2$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(4-f^2(x)\right)dx=\pi$.

5p	**b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.
5p	**c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 3+\log_2 12=\log_2 36=\log_2 6^2=$	**3p**
	$=2\log_2 6$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**
2.	$f(x)=x \Leftrightarrow x^2-x+1=x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$2x-1=2x+1$ sau $2x-1=-2x-1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulţimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulţimea numerelor naturale de două cifre sunt $4\cdot 5=20$ de numere care au cifra zecilor pară și cifra unităților impară, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{8}=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	$a=4$	**2p**
6.	$\cos B=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AB}{12}\Rightarrow AB=6\sqrt{3}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 12\cdot\dfrac{1}{2}=18\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-(-1)\cdot 4=$	**3p**
	$=-3+4=1$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2b-1 & 4b-4\\ 1-b & 3-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2b-3 & 4a+4b-8\\ -a-b+2 & -2a-2b+5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2(a+b-1)-1 & 4(a+b-1)-4\\ 1-(a+b-1) & 3-2(a+b-1)\end{pmatrix}=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(1+2+2^2+2^3+2^4-4)=A(27)$	**3p**
	$A(27)=A(32+(-n)-1)$, de unde obținem $n=4$	**2p**
2.a)	$1\circ 2=3\cdot 1^2-5\cdot 1\cdot 2+2\cdot 2^2=$	**3p**
	$=3-10+8=1$	**2p**
b)	$x\circ x=3x^2-5x^2+2x^2=$	**3p**
	$=-2x^2+2x^2=0$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0\Leftrightarrow 3\cdot 2^x\left(2^x-3^x\right)-2\cdot 3^x\left(2^x-3^x\right)=0\Leftrightarrow\left(2^x-3^x\right)\left(3\cdot 2^x-2\cdot 3^x\right)=0$	**3p**
	$2^x=3^x$ sau $3^{x-1}=2^{x-1}$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}}-x'=$	**3p**
	$=\dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}-1=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1)=2,\ f'(-1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right)$, adică $y=-x+1$	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $x^2+1\geq 2x$, obținem $f\left(x^2+1\right)\leq f(2x)$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f\left(x^2+1\right)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\left(x^2+1\right)$ și $f(2x)=\sqrt{(2x)^2+2\cdot 2x+2}-2x$, obținem $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\leq(x-1)^2$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(4-f^2(x)\right)dx=\int_0^1\left(4-\dfrac{4x^2}{x^2+1}\right)dx=4\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}dx=4\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=4\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0\right)=\pi$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{\sqrt{x^2+1}}dx=$	**3p**
	$=2\sqrt{x^2+1}\Big\vert_0^1=2\left(\sqrt{2}-1\right)$	**2p**
c)	$\int_1^2\dfrac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\int_1^2\dfrac{2x^2}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int_1^2\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}}dx=\int_1^2\dfrac{\left(x^2\right)'}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}}dx=$	**3p**
	$=\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\Big\vert_1^2=\ln\dfrac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$	**2p**