

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)  
Matematică *M\_șt-nat*

Testul 1

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2$  este întreg.
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 4x^2 + 2x$ . Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor  $f$  și  $g$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2+4x+2} = 64 \cdot 2^x$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $a$  din mulțimea  $A = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră paralelogramul  $MNPQ$  cu  $M(2,3)$ ,  $N(5,4)$  și  $P(4,0)$ . Determinați ecuația dreptei  $MQ$ .
- 5p 6. Triunghiul  $ABC$  este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că  $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1,0)) = 0$ .
- 5p b) Demonstrați că, dacă  $a \in (-\infty, 0)$  și  $b \in (0, +\infty)$ , atunci matricea  $A(a,b)$  este inversabilă.
- 5p c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  pentru care  $A(1,3) \cdot X = A(2,1)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Calculați  $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație  $y = 2021$  este paralelă cu asimptota spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \sin x$ .

5p a) Arătați că  $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = e(e-1)$ .

5p b) Calculați  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

5p c) Arătați că  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)  
Matematică *M\_șt-nat***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2 = 3 + 4\sqrt{3} - (7 + 4\sqrt{3}) =$ $= 3 + 4\sqrt{3} - 7 - 4\sqrt{3} = -4$ , care este număr întreg	3p 2p
2.	$f(a) = g(a) \Leftrightarrow 2a + 3 = 4a^2 + 2a \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{4}$ $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3p 2p
3.	$2^{x^2+4x+2} = 2^6 \cdot 2^x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 6 + x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $x = -4$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele $a$ din mulțimea $A$ care verifică inegalitatea $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$ sunt $-2$ și $4$ , deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{5}$	2p 2p 1p
5.	$MQ \parallel NP \Rightarrow m_{MQ} = m_{NP}$ , deci $m_{MQ} = 4$ Ecuația dreptei $MQ$ este $y - 3 = 4(x - 2)$ , deci $y = 4x - 5$	3p 2p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ și, cum $R = 5$ , obținem $\sin A = \frac{BC}{10}$ , $\sin B = \frac{AC}{10}$ și $\sin C = \frac{AB}{10}$ $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{BC}{10} \cdot \frac{AC}{10} \cdot \frac{AB}{10} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,0)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -1 - (-1) = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b)) = \begin{vmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{vmatrix} = 2(b-a+1)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ $a \in (-\infty, 0)$ și $b \in (0, +\infty) \Rightarrow b - a + 1 > 1 \Rightarrow \det(A(a,b)) \neq 0$ , deci $A(a,b)$ este inversabilă	2p 3p
c)	$A(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ , $\det(A(1,3)) = 6$ , deci $A(1,3)$ este inversabilă și $(A(1,3))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $X = (A(1,3))^{-1} \cdot A(2,1)$ și, cum $A(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ , obținem $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	3p 2p

<b>2.a)</b>	$1 \circ (-1) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) - (1 + (-1)) + \frac{2}{3} =$ $= -3 + \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}$	2p 3p
<b>b)</b>	$x \circ y = 3xy - x - y + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3x \left( y - \frac{1}{3} \right) - \left( y - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} =$ $= \left( y - \frac{1}{3} \right) (3x - 1) + \frac{1}{3} = 3 \left( x - \frac{1}{3} \right) \left( y - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p 2p
<b>c)</b>	$x \circ \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ și } \frac{1}{3} \circ y = \frac{1}{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$ $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} = \left( \left( 1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{8}} \right) \circ \frac{1}{3} \right) \circ \frac{1}{\sqrt{10}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} =$ $= \frac{1}{3} \circ \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} \right) = \frac{1}{3}$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 1' - \frac{1' \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$ $= -\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ este ecuația asimptotei spre } +\infty \text{ la graficul funcției}$ <p><math>f</math>, deci panta asimptotei spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math> este egală cu 0 Panta dreptei de ecuație <math>y = 2021</math> este egală cu 0, deci asimptota spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math> și dreapta de ecuație <math>y = 2021</math> sunt paralele, deoarece au pante egale</p>	3p 2p
<b>c)</b>	$f''(x) = \frac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}, x \in \mathbb{R} \text{ și } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ sau } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ <p><math>f''(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in \left( -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right]</math>, <math>f''(x) \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]</math> și <math>f''(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty \right)</math>, deci <math>x = -\frac{1}{\sqrt{3}}</math> și <math>x = \frac{1}{\sqrt{3}}</math> sunt punctele de inflexiune ale funcției <math>f</math></p>	2p 3p
<b>2.a)</b>	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = \int_1^2 \frac{e^x \sin x}{\sin x} dx = \int_1^2 e^x dx =$ $= e^x \Big _1^2 = e^2 - e = e(e - 1)$	2p 3p
<b>b)</b>	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' dx = e^2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^2 - e^x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx =$ $= e^2 + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx, \text{ deci } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{e^2 + 1}{2}$	3p 2p

e)	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x - \frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{e^x \sin x} dx = -e^{-\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \cdot \ln \sin x  \Big _{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$	3p
	$= -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \left( \ln\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \left( \ln 1 - \ln \frac{1}{2} \right) = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$	