

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

Testul 10

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că, dacă  $z_1 = 1 - 2i$  și  $z_2 = 1 + \frac{1}{2}i$ , unde  $i^2 = -1$ , atunci  $z_1 + z_2 = z_1 z_2$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$ , astfel încât  $(f \circ f)(x) = 2f(x - 1)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x+1} \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1}$ .
- 5p** 4. Determinați numărul funcțiilor  $f: \{0, 2, 4\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$  cu proprietatea  $f(2) \leq 8$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(-2, 4)$ ,  $B(2, 0)$  și  $C$  astfel încât  $AC = BC$ . Determinați ecuația dreptei  $d$ , care trece prin punctul  $C$  și este perpendiculară pe dreapta  $AB$ .
- 5p** 6. Determinați  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  pentru care  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x + 1$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real și  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(x)) = 6^{2x}$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A(x) \cdot B = B \cdot A(x)$ .
- 5p** c) Demonstrați că orice matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $X \cdot X = A(1)$  are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $2 \circ 1 = 12$ .
- 5p** b) Se consideră numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât  $2a + 2b + c \neq 0$ . Știind că  $c \circ a = c \circ b$ , demonstrați că  $a = b$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ (x + 1) = 5x^3 + 2$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln x + a(x + 1)$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \ln x + 1 + a$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Pentru  $a = 1$ , determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ , funcția  $f$  este convexă.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + e^x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{e}$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1 x f(x^2) dx$ .
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_0^2 x^n (f(x) - 2x) dx$ . Demonstrați că  $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1} e^2$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 10

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$z_1 + z_2 = 1 - 2i + 1 + \frac{1}{2}i = 2 - \frac{3}{2}i$	2p
	$z_1 z_2 = (1 - 2i) \left( 1 + \frac{1}{2}i \right) = 1 + \frac{1}{2}i - 2i - i^2 = 2 - \frac{3}{2}i$ , deci $z_1 + z_2 = z_1 z_2$	3p
2.	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2(2x + m) + m = 4x + 3m$ , $2f(x - 1) = 2(2(x - 1) + m) = 4x - 4 + 2m$ ,	3p
	pentru orice număr real $x$ $4x + 3m = 4x - 4 + 2m \Leftrightarrow m = -4$	2p
3.	$5 \cdot 5^x \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1} \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^x = 10 \cdot 7^{x-1} \Leftrightarrow 10^{x-1} = 7^{x-1}$	3p
	$x - 1 = 0$ , deci $x = 1$	2p
4.	$f(2)$ poate fi aleasă în trei moduri și, pentru fiecare alegere a lui $f(2)$ , numerele $f(0)$ și $f(4)$ pot fi alese în câte patru moduri	3p
	Există $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ de funcții $f: \{0, 2, 4\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$ cu proprietatea $f(2) \leq 8$	2p
5.	$m_d \cdot m_{AB} = -1$ și, cum $m_{AB} = -1$ , obținem $m_d = 1$	2p
	$AC = BC \Rightarrow d$ este mediatoarea segmentului $AB$ și, cum $M(0, 2)$ este mijlocul segmentului $AB$ , obținem că ecuația dreptei $d$ este $y = x + 2$	3p
6.	$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - x\right) = 1$	2p
	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ , deci $x = \frac{\pi}{6}$	3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{vmatrix} = 4^x \cdot 9^x - 0 \cdot 0 =$	3p
	$= 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 6^{2x}$ , pentru orice număr real $x$	2p
b)	$A(x) \cdot B = \begin{pmatrix} -4^x & 4^x \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$ , $B \cdot A(x) = \begin{pmatrix} -4^x & 9^x \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$	3p
	$\begin{pmatrix} -4^x & 4^x \\ 0 & 9^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4^x & 9^x \\ 0 & 9^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4^x = 9^x$ , de unde obținem $x = 0$	2p
c)	Cum $A(1) \cdot X = X \cdot X \cdot X = X \cdot A(1)$ , pentru $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 9c & 9d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 9b \\ 4c & 9d \end{pmatrix}$ , deci $b = 0$ și $c = 0$	3p

	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-2, 2\} \text{ și } d \in \{-3, 3\}, \text{ deci orice matrice } X \text{ cu proprietatea că}$ $X \cdot X = A(1) \text{ are toate elementele numere întregi}$	2p
2.a)	$2 \circ 1 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 =$ $= 8 + 2 + 2 = 12$	3p 2p
b)	$2c^2 + ca + 2a^2 = 2c^2 + cb + 2b^2 \Leftrightarrow c(a-b) + 2(a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(c + 2a + 2b) = 0$ <p>Cum <math>2a + 2b + c \neq 0</math>, obținem <math>a - b = 0</math>, deci <math>a = b</math></p>	3p 2p
c)	$2x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 5x^3 + 2 \Leftrightarrow 5x^3 - 5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x(x^2 - x - 1) = 0$ $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, x = 0 \text{ sau } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + a(x+1)' =$ $= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + a = \ln x + 1 + a, x \in (0, +\infty), \text{ pentru orice număr real } a$	3p 2p
b)	$f'(x) = \ln x + 2, \text{ deci } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$ $f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right] \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } \left(0, \frac{1}{e^2}\right] \text{ și } f'(x) \geq 0, \text{ pentru}$ $\text{orice } x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right) \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty), \text{ pentru orice număr real } a$ $f''(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci, pentru orice număr real } a, \text{ funcția } f \text{ este convexă}$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x + e^x) dx = \left(x^2 + e^x\right) \Big _{-1}^0 =$ $= 0 + e^0 - 1 - e^{-1} = -\frac{1}{e}$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x f(x^2) dx = \int_0^1 (2x^3 + xe^{x^2}) dx = \int_0^1 2x^3 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)' e^{x^2} dx = \frac{x^4}{2} \Big _0^1 + \frac{e^{x^2}}{2} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} + \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e}{2}$	3p 2p
c)	$I_{n+1} = \int_0^2 x^{n+1} (f(x) - 2x) dx = \int_0^2 x^{n+1} e^x dx = x^{n+1} e^x \Big _0^2 - (n+1) \int_0^2 x^n e^x dx =$ $= 2^{n+1} e^2 - (n+1) I_n, \text{ deci } I_{n+1} + (n+1) I_n = 2^{n+1} e^2, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$	3p 2p