

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_2 = 6$ și $b_3 = 3$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Determinați numerele reale a , pentru care $f(-a) + f(a) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1} = 16 \cdot 4^{-x}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,-3)$ și $C(a,a+3)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OC trece prin mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Arătați că $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(B(1,2)) = -1$.
- 5p** b) Arătați că $\det(A \cdot B(a,b)) = 0$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați numerele reale a și b pentru care $A \cdot B(a,b) = B(a,b) \cdot A$.
2. Pe mulțimea $M = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = |x - y| + 1$.
- 5p** a) Arătați că $3 \circ 5 = 3$.
- 5p** b) Calculați $a - b$, știind că $a = (2 \circ 3) \circ 4$ și $b = 2 \circ (3 \circ 4)$.
- 5p** c) Arătați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m \circ n = m$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f **nu** este surjectivă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 2f(x) dx = 3$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_0^e f(e^x) dx \leq \int_0^e e^{f(x)} dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_3^2 = b_2 b_4 \Rightarrow 3^2 = 6b_4$ $b_4 = \frac{3}{2}$	3p 2p
2.	$(-a)^2 + 3(-a) - 4 + a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4$ $a = -2$ sau $a = 2$	3p 2p
3.	$2^{x+1} = 2^4 \cdot 2^{-2x} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{4-2x} \Leftrightarrow x+1 = 4-2x$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor sunt 12, 24, 36 și 48, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	2p 2p 1p
5.	$M(3,1)$ este mijlocul segmentului AB $M \in OC \Leftrightarrow C \in OM$ și, cum dreapta OM are ecuația $x-3y=0$, obținem $a-3(a+3)=0$, deci $a = -\frac{9}{2}$	2p 3p
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, pentru orice număr real x $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x - (-\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$	2p 3p
b)	$A \cdot B(a,b) = \begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b $\det(A \cdot B(a,b)) = 2(a+1)(b+1) - 2(a+1)(b+1) = 0$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$B(a,b) \cdot A = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b $\begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=0$ și $b=0$	2p 3p

2.a)	$3 \circ 5 = 3 - 5 + 1 = -2 + 1 =$ $= 2 + 1 = 3$	3p 2p
b)	$a = (2 \circ 3) \circ 4 = 2 \circ 4 = 3$ $b = 2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 2 = 1$, deci $a - b = 2$	2p 3p
c)	Pentru $n = 1$ și m număr natural nenul, $m \circ n = m \circ 1 = m - 1 + 1 = m - 1 + 1 =$ $= m$, deci există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (m, n) pentru care $m \circ n = m$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (\ln(x-1) - \ln(x+1))' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} =$ $= \frac{x+1 - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$, $x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} =$ $= \ln \frac{1-0}{1+0} = \ln 1 = 0$	3p 2p
c)	$x \in (1, +\infty) \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, deci funcția f este crescătoare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deci funcția f nu este surjectivă	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 2f(x) dx = \int_0^1 (2x+2) dx = (x^2 + 2x) \Big _0^1 =$ $= 1 + 2 = 3$	3p 2p
b)	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x (x+1) dx = \int_0^1 (e^x)' (x+1) dx = (x+1)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx =$ $= 2e - 1 - e^x \Big _0^1 = 2e - 1 - (e - 1) = e$	3p 2p
c)	$f(e^x) - e^{f(x)} = e^x + 1 - e^{x+1} = 1 - e^x(e-1)$, pentru orice $x \in [0, e]$ $e - 1 > 1$ și $e^x \geq 1$, pentru orice $x \in [0, e] \Rightarrow 1 - e^x(e-1) \leq 0$, pentru orice $x \in [0, e]$, de unde obținem că $\int_0^e f(e^x) dx \leq \int_0^e e^{f(x)} dx$	2p 3p