

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul b_8 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 3$ și $b_6 = 6$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 3$. Arătați că $(f \circ f)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \lg x = \lg(5x + 6)$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(-1,-2)$ și $C(a,-2)$, unde a este număr real nenul, $a \neq -1$. Determinați numărul real a pentru care ortocentrul triunghiului ABC este O .
- 5p** 6. În triunghiul ABC , $AB = 6$, $AC = 3\sqrt{6}$ și $B = \frac{\pi}{3}$. Determinați măsura unghiului C .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(\sqrt{2})) = 3$.
- 5p** b) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați numărul întreg k pentru care $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = kA(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$.
- 5p** a) Arătați că numărul $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3}$ este întreg.
- 5p** b) Arătați că $x \circ x \geq \frac{2}{3}$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $x \circ x \circ x = e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** c) Demonstrați că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) < f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.
2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^4 f^4(x) dx = 21$.

5p | **b)** Calculați $\int_0^1 f(e^x) dx$.

5p | **c)** Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)} dx = 2e^2$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice este $q = \frac{b_6}{b_5} = 2$ $b_8 = b_6 q^2 = 6 \cdot 4 = 24$	2p 3p
2.	$f(\sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3} - 3 = -\sqrt{3}$ $f(f(\sqrt{3})) = f(-\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} - 3 = \sqrt{3}$	2p 3p
3.	$\lg x^2 = \lg(5x+6) \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = 6$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Cifra sutelor, egală cu cifra unităților, poate fi aleasă în 9 moduri, iar, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 10 moduri, deci sunt 90 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$BC \parallel Ox$ și $A \in Oy \Rightarrow AO \perp BC$, deci O este ortocentrul triunghiului $ABC \Leftrightarrow OC \perp AB$ Cum $m_{OC} = -\frac{2}{a}$ și $m_{AB} = 5$, obținem că $-\frac{2}{a} \cdot 5 = -1$, deci $a = 10$	2p 3p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin C = \frac{6 \sin B}{3\sqrt{6}}$ și, cum $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, obținem $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Cum $C < \pi - \frac{\pi}{3}$, obținem $C = \frac{\pi}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(\sqrt{2})) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = 1 + 2 = 3$	2p 3p
b)	$\det A(a) = 1 + a^2$, pentru orice număr real a $1 + a^2 > 0$, pentru orice număr real $a \Rightarrow \det A(a) \neq 0$, deci $A(a)$ este inversabilă pentru orice număr real a	2p 3p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2$ $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = -4I_2 \cdot A(1) = -4A(1)$, deci $k = -4$	3p 2p

2.a)	$\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 =$	3p
	$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 2 = 1$, care este număr întreg	2p
b)	$x \circ x = 3x^2 - 4x + 2$, pentru orice număr real x	2p
	$x \circ x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + \frac{4}{3} \geq 0$ și, cum $\Delta = 0$, obținem că $x \circ x \geq \frac{2}{3}$, pentru orice număr real x	3p
c)	$x \circ 1 = 1 \circ x = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 1$	2p
	$x \circ x \circ x = 1 \Leftrightarrow 3^2 \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, de unde obținem $x = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} =$	3p
	$= \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$, deci graficul lui f nu admite asimptotă spre $+\infty$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$, $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ și, cum f este continuă în $x = 1$, obținem că f este strict crescătoare pe \mathbb{R}	3p
	Cum $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{\sqrt{5}}{2}$, obținem că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) < f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$	2p
2.a)	$\int_1^4 f^4(x) dx = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^4 =$	3p
	$= \frac{4^3 - 1^3}{3} = 21$	2p
b)	$\int_0^1 f(e^x) dx = \int_0^1 \sqrt{e^x} dx = \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \Big _0^1 =$	3p
	$= 2e^{\frac{1}{2}} - 2e^0 = 2\sqrt{e} - 2$	2p
c)	$\int_1^4 e^{f(x)} dx = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^4 (\sqrt{x})' \cdot \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 t e^t dt =$	3p
	$= 2(t-1)e^t \Big _1^2 = 2e^2$	2p